JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

PUBLIÉ DE 1875 A 1884

PAR H. RESAL.

SIXIÈME SÉRIE,

PUBLIÉE

PAR CAMILLE JORDAN,

AVEC LA COLLABORATION DE

G. HUMBERT, E. PICARD, H. POINCARÉ.

TOME SEPTIÈME. — ANNÉE 1911.

(76e Volume de la Collection.)

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1911

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur les petites oscillations d'un corps flottant;

Par M. Pierre DUHEM.

INTRODUCTION.

Comme la plupart des problèmes de stabilité de l'équilibre, le problème de la stabilité de l'équilibre des corps flottants a été abordé par deux voies bien distinctes.

La première de ces deux voies, ouverte par Lagrange et rendue absolument sûre par une belle démonstration de Lejeune-Dirichlet, conduit à des conditions qui suffisent certainement à la stabilité de l'équilibre; elle consiste à indiquer en quelles circonstances le potentiel total du système est minimum. Dans le cas où le flotteur, soumis exclusivement à la pesanteur, est immergé en un liquide pesant, homogène et incompressible, cette méthode a donné lieu, de la part de Bravais, puis de M. Guyou, à de très élégantes démonstrations géométriques. Dans le cas où les actions extérieures sont quelconques et où le fluide est compressible suivant une loi quelconque, cette méthode peut encore être suivie analytiquement jusqu'à la solution complète du problème [1]; elle ramène, en effet, cette solution au problème purement algébrique que voici : *Exprimer qu'une certaine forme quadratique de six variables est une forme définie positive;* ou bien encore à celui-ci : *Exprimer qu'une certaine équation du sixième degré a toutes ses racines réelles et positives.*

Le second procédé propre à l'étude de la stabilité d'un flotteur est le procédé dit *des petits mouvements.* Il consiste à supposer que le flotteur et le fluide sont animés d'un petit mouvement pendulaire et à exprimer que la période de ce mouvement est nécessairement une quantité réelle.

La légitimité de l'emploi de ce procédé prête à des objections générales que nous ne voulons pas examiner ici, afin de nous borner à ce qui concerne spécialement le problème des oscillations pendulaires d'un flotteur.

Dans le cas où le fluide est homogène et où la pesanteur agit seule, les équations qui régissent ces oscillations ont été formées et étudiées par Poisson et par Duhamel; mais, dans la formation de ces équations, ces deux auteurs ont admis une supposition tout à fait inexacte ; pour calculer la pression qui s'exerce en chaque point de la surface du solide que baigne le liquide, ils ont suivi les règles posées par l'Hydrostatique; ils n'ont tenu aucun compte des forces d'inertie appliquées aux divers éléments du fluide en vertu du mouvement de ce dernier; de ce chef, donc, leur analyse est incorrecte. Chose bien digne de remarque : Cette manière de traiter le problème de la stabilité d'un flotteur, bien qu'elle ne soit pas justifiée en principe et qu'elle comporte une erreur incontestable au cours de son développement, fournit les mêmes conditions de stabilité que la méthode justifiée par Lejeune-Dirichlet et correctement appliquée par Bravais et par M. Guyou ; elle aboutit à la classique *règle du métacentre.*

(1) P. DUHEM. *De l'influence qu'un chargement liquide exerce sur la stabilité d'un navire* (*Bulletin de l'Association technique maritime*, n° 7, session de 1896); *Condition nécessaire et suffisante pour la stabilité de l'équilibre des corps flottants* (*Procès-verbaux de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 7 janvier 1897); *Sur la stabilité de l'équilibre d'un corps flottant à la surface d'un liquide compressible* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. III, 1897, p. 389).

Clebsch a repris ([1]) la théorie des petites oscillations pendulaires qu'un solide pesant peut effectuer lorsqu'il flotte à la surface d'un liquide incompressible et pesant. Il a soigneusement signalé et évité l'erreur qu'avaient commise Poisson et Duhamel. Il a obtenu de la sorte des équations correctes, mais bien autrement compliquées que celles dont ses prédécesseurs avaient fait usage. En exprimant que les périodes de toutes les oscillations pendulaires sont réelles, il a été conduit à une condition qui ne concorde nullement avec celle que l'on déduit de la méthode de Lagrange et de Lejeune-Dirichlet; celle-ci revient, en effet, au problème d'Algèbre par lequel on exprime qu'une certaine forme quadratique est définie positive; celle-là exige la solution d'une question toute différente; il s'agit de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une certaine équation transcendante ait toutes ses racines réelles et positives.

Sans discuter plus profondément la nature et les causes de ce désaccord, Clebsch n'avait pas hésité à en conclure que la classique règle du métacentre était inexacte. Cette conclusion, vraisemblable si la règle du métacentre n'avait d'autre justification que la théorie de Poisson et de Duhamel, ne saurait être admise du moment que cette règle est tirée, par des raisonnements irréprochables, de la proposition énoncée par Lagrange et démontrée par Lejeune-Dirichlet. Il nous faut donc, de ce désaccord entre les résultats des deux méthodes qui ont servi à étudier la stabilité d'un corps flottant, donner une autre raison; et, dans ce but, il nous faut, tout d'abord, examiner ce désaccord plus complètement que Clebsch n'a cru le devoir faire; c'est ce travail que nous nous proposons d'accomplir ici.

D'ailleurs, nous commencerons par prendre la question d'une manière beaucoup plus générale que Clebsch ne l'a fait. Au lieu de supposer le fluide incompressible, nous le regarderons comme compressible suivant une loi quelconque, mais de température uniforme et constante. Au lieu de supposer que la pesanteur est la seule force agissante, nous admettrons que le fluide et le flotteur sont l'un et l'autre soumis à des actions extérieures *newtoniennes* et dépendant d'un

---

([1]) Clebsch, *Ueber das Gleichgewicht schwimmender Körper* (*Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik*, Bd. LVII, 1860, p. 149).

potentiel. Le système dont nous étudierons les petits mouvements aura ainsi la même généralité que celui dont nous avons appris à former les conditions de stabilité par la méthode de Lagrange et de Lejeune-Dirichlet ; nous pourrons, par conséquent, comparer entre eux les résultats auxquels nous conduisent ces deux méthodes.

De cette étude générale, il nous sera facile de repasser à celle que Clebsch a poursuivie.

I. — Étude cinématique des petits mouvements d'un solide flottant sur un fluide.

Nous garderons ici les notations que nous avons adoptées, en général, en nos divers Mémoires sur la stabilité des corps flottants. Nous désignerons donc par l'indice 3 le solide, par l'indice 2 le liquide compressible *unique* sur lequel il flotte, réservant l'indice 1 à l'espace vide qui surmonte ce fluide. S_{23} sera, à l'instant t, la surface de contact du solide et du fluide.

Nous supposerons que, pour faire passer le solide de sa position d'équilibre à la position qu'il occupe au temps t, il faille lui imposer :

1° Trois translations infiniment petites, $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$, respectivement parallèles aux trois axes de coordonnées Ox, Oy, Oz;

2° Trois rotations infiniment petites, $l(t)$, $m(t)$, $n(t)$, effectuées respectivement autour de ces trois axes.

Un point de ce solide qui, dans l'état d'équilibre, avait pour coordonnées x_0, y_0, z_0, a, à l'instant t, des coordonnées x, y, z, et l'on peut écrire

$$(1)\qquad \begin{cases} x - x_0 = f(t) + z_0\, m(t) - y_0\, n(t), \\ y - y_0 = g(t) + x_0\, n(t) - z_0\, l(t), \\ z - z_0 = h(t) + y_0\, l(t) - x_0\, m(t). \end{cases}$$

Le fluide et le solide doivent demeurer contigus le long de la surface s_{23}; on voit sans peine que, si l'on néglige les infiniment petits d'ordre supérieur au premier, on peut exprimer cette condition de la manière suivante :

En tout point (x_0, y_0, z_0) de la surface s_{23} le long de laquelle le solide et le fluide confinent dans l'état d'équilibre, on a, quel que *soit t,*

$$(2)\quad \begin{aligned}&[f(t)+z_0 m(t)-y_0 n(t)-a(x_0, y_0, z_0, t)]\cos(N_0, x)\\ &+[g(t)+x_0 n(t)-z_0 l(t)\quad -b(x_0, y_0, z_0, t)]\cos(N_0, y)\\ &+[h(t)+y_0 l(t)-x_0 m(t)-c(x_0, y_0, z_0, t)]\cos(N_0, z)=0.\end{aligned}$$

En cette égalité,

$$a(x_0, y_0, z_0, t),\quad b(x_0, y_0, z_0, t),\quad c(x_0, y_0, z_0, t)$$

sont, à l'instant t, les composantes de l'élongation du point du fluide dont les coordonnées, en l'état d'équilibre, étaient x_0, y_0, z_0;

N_0 *est la direction de la normale menée au point* (x_0, y_0, z_0), *et vers l'intérieur du fluide, à la surface* s_{23}.

Le point du solide qui, dans l'état d'équilibre, occuperait la position (x_0, y_0, z_0) sur la surface S_{23}, occupe, à l'instant t, la position (x, y, z) sur la surface s_{23}; si N est la normale en (x, y, z), et vers l'intérieur du fluide, à la surface s_{23}, on a visiblement

$$(3)\quad \begin{cases}\cos(N, x)-\cos(N_0, x)=\cos(N_0, z)\,m(t)-\cos(N_0, y)\,n(t),\\ \cos(N, y)-\cos(N_0, y)=\cos(N_0, x)\,n(t)-\cos(N_0, z)\,l(t),\\ \cos(N, z)-\cos(N_0, z)=\cos(N_0, y)\,l(t)-\cos(N_0, x)\,m(t).\end{cases}$$

Dans ce qui va suivre, nous admettrons l'existence, au sein du fluide, d'une *fonction potentielle des élongations* (1) $\psi(x, y, z, t)$, en sorte que nous aurons, en tout point et à tout instant,

$$(4)\quad \begin{cases}a(x, y, z, t)=-\dfrac{\partial\psi(x, y, z, t)}{\partial x},\\ b(x, y, z, t)=-\dfrac{\partial\psi(x, y, z, t)}{\partial y},\\ c(x, y, z, t)=-\dfrac{\partial\psi(x, y, z, t)}{\partial z}.\end{cases}$$

Ces égalités montrent que, dans tout le fluide, $\psi(x, y, z, t)$ diffère infiniment peu d'une simple fonction de t.

---

(1) P. Duhem, *Sur la stabilité et les petits mouvements des corps fluides*, égalité (11), p. 259 (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. IX, 1903).

La condition (2) pourra alors s'écrire

$$(5)\quad \begin{aligned} &[f(t) + z_0 m(t) - y_0 n(t)] \cos(N_0, x) \\ &+ [g(t) + x_0 n(t) - z_0 l(t)] \cos(N_0, y) \\ &+ [h(t) + y_0 l(t) - x_0 m(t)] \cos(N_0, z) + \frac{\partial \psi(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial N_0} = 0. \end{aligned}$$

Les formules (1) fournissent l'expression de la force vive du solide.

Posons

$$(6)\quad \left\{ \begin{array}{lll} & \mathfrak{M} = \int dm_3, & \\ M_x = \int x_0 \, dm_3, & M_y = \int y_0 \, dm_3, & M_z = \int z_0 \, dm_3, \\ J_x = \int (y_0^2 + z_0^2) \, dm_3, & J_y = \int (z_0^2 + x_0^2) \, dm_3, & J_z = \int (x_0^2 + y_0^2) \, dm_3, \\ P_{yz} = \int y_0 z_0 \, dm_3, & P_{zx} = \int z_0 x_0 \, dm_3, & P_{xy} = \int x_0 y_0 \, dm_3. \end{array} \right.$$

En ces égalités, dm_3 est une masse élémentaire du corps solide; (x_0, y_0, z_0) est, dans l'état d'équilibre, la position occupée par un point de cette masse; les intégrales s'étendent toutes au solide entier tel qu'il est disposé dans l'état d'équilibre.

Si l'on néglige les infiniment petits d'ordre supérieur au second, la force vive du solide peut s'écrire

$$(7)\quad \begin{aligned} \mathfrak{T} = {} & \frac{\mathfrak{M}}{2} \left[\left(\frac{df}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dg}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dh}{dt}\right)^2 \right] \\ & + \frac{df}{dt}\left(M_z \frac{dm}{dt} - M_y \frac{dn}{dt} \right) + \frac{dg}{dt}\left(M_x \frac{dn}{dt} - M_z \frac{dl}{dt} \right) + \frac{dh}{dt}\left(M_y \frac{dl}{dt} - M_x \frac{dm}{dt} \right) \\ & + \frac{J_x}{2}\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + \frac{J_y}{2}\left(\frac{dm}{dt}\right)^2 + \frac{J_z}{2}\left(\frac{dn}{dt}\right)^2 \\ & - P_{yz} \frac{dm}{dt}\frac{dn}{dt} - P_{zx} \frac{dn}{dt}\frac{dl}{dt} - P_{xy} \frac{dl}{dt}\frac{dm}{dt}. \end{aligned}$$

Remarquons de suite, comme conséquence de cette formule, que *la* *forme quadratique en* F, G, H, L, M, N

$$(8)\quad \mathfrak{F} = \mathfrak{M}(F^2+G^2+H^2) \\ + 2F(M_zM - M_yN) + 2G(M_xN - M_zL) + 2H(M_yL - M_xM) \\ + J_xL^2 + J_yM^2 + J_zN^2 - 2P_{yz}MN - 2P_{zx}NL - 2P_{xy}LM$$

est une forme définie positive.

De l'expression (7) de la force vive $\mathfrak{T}$, on tire sans peine l'expression des actions d'inertie auxquelles le solide est soumis à l'instant t; si l'on en effectue la réduction à l'origine O des coordonnées, ces actions se réduisent à une force dont les composantes sont $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$, et à un couple dont les moments par rapport à Ox, Oy, Oz sont $\lambda(t)$, $\mu(t)$, $\nu(t)$. En n'écrivant que les infiniment petits du premier ordre, on a

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \xi(t) &= -\mathfrak{M}\frac{d^2f(t)}{dt^2} - M_z\frac{d^2m(t)}{dt^2} + M_y\frac{d^2n(t)}{dt^2}, \qquad \ldots\ldots \\ \lambda(t) &= -M_y\frac{d^2h(t)}{dt^2} + M_z\frac{d^2g(t)}{dt^2} \\ &\quad - J_x\frac{d^2l(t)}{dt^2} + P_{xy}\frac{d^2m(t)}{dt^2} + P_{xz}\frac{d^2n(t)}{dt^2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

II. — Étude dynamique des petits mouvements du corps solide.

Soit $U(x, y, z)$ la fonction potentielle des forces extérieures auxquelles le corps solide est soumis; lorsque x, y, z sont les coordonnées d'un point de la masse élémentaire dm_3, cette masse est supposée soumise à une force dont les trois composantes sont

$$-\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x}dm_3,$$

$$-\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y}dm_3,$$

$$-\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z}dm_3.$$

Les forces de ce genre qui sollicitent le solide à l'instant t se réduisent à une force, de composantes $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$, appliquée au point qui coïncide avec l'origine des coordonnées, et à un couple dont les moments par rapport à Ox, Oy et Oz sont respectivement $P(t)$, $Q(t)$, $R(t)$.

Soient X_0, Y_0, Z_0, P_0, Q_0, R_0 ce que sont ces mêmes quantités pour le corps en équilibre. En négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier, nous trouvons sans peine six égalités dont la première est

$$
\begin{aligned}
(10)\quad X(t) = X_0 - f(t)\int \frac{\partial^2 U}{\partial x_0^2}\,dm_3 - g(t)\int \frac{\partial^2 U}{\partial x_0\,\partial y_0}\,dm_3 - h(t)\int \frac{\partial^2 U}{\partial x_0\,\partial z_0}\,dm_3 \\
- l(t)\int\left(y_0\frac{\partial^2 U}{\partial x_0\,\partial z_0} - z_0\frac{\partial^2 U}{\partial x_0\,\partial y_0}\right)dm_3 \\
- m(t)\int\left(z_0\frac{\partial^2 U}{\partial x_0^2} - x_0\frac{\partial^2 U}{\partial x_0\,\partial z_0}\right)dm_3 \\
- n(t)\int\left(x_0\frac{\partial^2 U}{\partial x_0\,\partial y_0} - y_0\frac{\partial^2 U}{\partial x_0^2}\right)dm_3.
\end{aligned}
$$

En cette égalité, toutes les intégrations s'étendent à la masse entière du solide prise en la situation que ce solide occupe alors que l'équilibre est établi.

Pour écrire les équations du mouvement du solide, on peut, à chaque instant, faire abstraction de l'existence du fluide, à la condition d'adjoindre aux actions extérieures précédentes les pressions qu'à ce même instant le fluide exerce sur la surface mouillée du solide.

A chaque instant t, ces pressions peuvent se réduire à une force de composantes $X'(t)$, $Y'(t)$, $Z'(t)$, appliquée au point O, et à un couple dont les moments par rapport à Ox, Oy, Oz sont respectivement $P'(t)$, $Q'(t)$, $R'(t)$.

Formons, par exemple, $X'(t)$.

Si $\Pi(x, y, z, t)$ désigne la pression au point (x, y, z) du fluide et à l'instant t, nous aurons

$$
(11)\qquad X'(t) = -\int \Pi(x, y, z, t)\cos(N, x)\,dS_{23},
$$

l'intégration s'étendant à la surface mouillée du solide dans la position qu'elle occupe à l'instant t.

La valeur de $\Pi(x, y, z, t)$ est donnée par la formule suivante :

$$\Pi = \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho},$$

où $\zeta(\rho, T)\, dm_2$ est le potentiel interne de la masse dm_2 du fluide de densité ρ et de température T.

D'ailleurs, si l'on désigne par $V(x, y, z)$ la fonction potentielle des actions extérieures auxquelles le fluide est soumis, on a [1], en tout point du fluide en mouvement et à tout instant, l'égalité

$$V + \zeta(\rho) + \rho \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0.$$

Posons

$$\varphi(\rho, T) = \rho\, \zeta(\rho, T), \tag{12}$$

et nous pourrons écrire, en négligeant de noter la température T qui est constante en tout point du fluide et à tout instant,

$$\Pi(x, y, z, t) = -\varphi[\rho(x, y, z, t)] - \rho(x, y, z, t)\left[V(x, y, z) - \frac{\partial^2 \psi(x, y, z, t)}{\partial t^2}\right]. \tag{13}$$

Désignons par $\rho_0(x, y, z)$ la valeur de la densité du fluide au point (x, y, z) lorsque l'équilibre est établi ; la différence

$$\rho(x, y, z, t) - \rho_0(x, y, z)$$

est, en général et au plus, un infiniment petit du premier ordre. Si donc nous conservons seulement les termes finis et les termes infiniment petits du premier ordre, nous pourrons remplacer l'égalité (13) par celle-ci :

$$\begin{aligned} \Pi(x, y, z, t) = {} & -\varphi[\rho_0(x, y, z)] - [\rho(x, y, z, t) - \rho_0(x, y, z)] \frac{d\varphi[\rho_0(x, y, z)]}{d\rho_0(x, y, z)} \\ & - \left[V(x, y, z) - \frac{\partial^2 \psi(x, y, z, t)}{\partial t^2}\right] \rho_0(x, y, z) \\ & - V(x, y, z)\,[\rho(x, y, z, t) - \rho_0(x, y, z)]. \end{aligned} \tag{14}$$

Cette égalité, à son tour et au même degré d'exactitude, peut évidem-

---

[1] *Sur la stabilité et les petits mouvements des corps fluides*, Chap. II, égalité (33), p. 278 (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5ᵉ série, t. IX, 1903).

ment s'écrire

$$
\begin{aligned}
(15)\quad \Pi(x,y,z,t) = &-\varphi[\rho_0(x_0,y_0,z_0)] - V(x_0,y_0,z_0)\,\rho_0(x_0,y_0,z_0)\\
&-\left\{\frac{d\varphi[\rho_0(x_0,y_0,z_0)]}{d\rho_0(x_0,y_0,z_0)} + V(x_0,y_0,z_0)\right\}\\
&\times\left[\rho(x,y,z,t)-\rho_0(x,y,z) + \frac{\partial\rho_0(x_0,y_0,z_0)}{\partial x_0}(x-x_0)\right.\\
&\left.+\frac{\partial\rho_0(x_0,y_0,z_0)}{\partial y_0}(y-y_0) + \frac{\partial\rho_0(x_0,y_0,z_0)}{\partial z_0}(z-z_0)\right]\\
&-\rho_0(x_0,y_0,z_0)\left[\frac{\partial V(x_0,y_0,z_0)}{\partial x_0}(x-x_0)\right.\\
&\qquad+\frac{\partial V(x_0,y_0,z_0)}{\partial y_0}(y-y_0)\\
&\qquad\left.+\frac{\partial V(x_0,y_0,z_0)}{\partial z_0}(z-z_0)\right]\\
&+\rho_0(x_0,y_0,z_0)\,\frac{\partial^2\psi(x_0,y_0,z_0,t)}{\partial t^2}.
\end{aligned}
$$

Mais, en tout point du fluide en équilibre, on a

$$
(16)\qquad \frac{d\varphi[\rho_0(x,y,z)]}{d\rho(x,y,z)} + V(x,y,z) + C = 0,
$$

C étant une constante.

En outre, si l'on désigne par $\Pi_0(x,y,z)$ la valeur de la pression au point (x,y,z) du fluide en équilibre, on a

$$
(17)\qquad \varphi[\rho_0(x,y,z)] + [V(x,y,z)+C]\rho_0(x,y,z) + \Pi_0(x,y,z) = 0,
$$

C étant la même constante qu'en l'égalité précédente.

La comparaison des égalités (14) et (17) nous montre que, dans tout le fluide et à tout instant, la quantité

$$
\frac{\partial^2\psi(x,y,z,t)}{\partial t^2} + C
$$

---

(1) P. Duhem, *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants*, Chap. I, égalité (38) (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. I, 1895, p. 127).

(2) *Ibid.*, égalité (39), p. 127.

qui se réduirait à zéro si le fluide était en équilibre, est, en général et au plus, un infiniment petit du premier ordre.

Les égalités (15), (16) et (17) donnent, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier,

$$
\begin{aligned}
(18)\quad \Pi(x, y, z, t) = {} & \Pi_0(x_0, y_0, z_0) + \rho_0(x_0, y_0, z_0)\left[\frac{\partial^2\psi(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t^2} - C\right] \\
& - \rho_0(x_0, y_0, z_0)\left[\frac{\partial V(x_0, y_0, z_0)}{\partial x_0}(x - x_0)\right. \\
& \qquad + \frac{\partial V(x_0, y_0, z_0)}{\partial y_0}(y - y_0) \\
& \qquad \left. + \frac{\partial V(x_0, y_0, z_0)}{\partial z_0}(z - z_0)\right].
\end{aligned}
$$

En vertu de cette égalité (18), l'égalité (11) devient, en négligeant les quantités infiniment petites du second ordre,

$$
\begin{aligned}
(19)\quad X'(t) = {} & -\int \Pi_0(x_0, y_0, z_0)\cos(N_0, x)\, ds_{23} \\
& - \int \Pi_0(x_0, y_0, z_0)\left[\cos(N, x) - \cos(N_0, x)\right] ds_{23} \\
& + \int \rho_0(x_0, y_0, z_0)\left[\frac{\partial V_0}{\partial x_0}(x - x_0) + \frac{\partial V_0}{\partial y_0}(y - y_0)\right. \\
& \qquad \left. + \frac{\partial V_0}{\partial z_0}(z - z_0)\right]\cos(N_0, x)\, ds_{23} \\
& - \int \rho_0(x_0, y_0, z_0)\left[\frac{\partial^2\psi(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t^2} - C\right]\cos(N_0, x)\, ds_{23}.
\end{aligned}
$$

En cette égalité, V_0 a été mis pour $V(x_0, y_0, z_0)$; les intégrales s'étendent toutes à la surface du solide que le liquide baigne dans l'état d'équilibre.

En cet état, les pressions que le fluide exerce sur le solide se réduisent à une force, de composantes X_0, Y_0, Z_0, dont le point d'application est en O, et à un couple dont les moments par rapport à Ox, Oy, Oz sont respectivement P'_0, Q'_0, R_0. On a

$$
(20)\qquad X'_0 = -\int \Pi_0(x_0, y_0, z_0)\cos(N_0, x)\, ds_{23}.
$$

On a également

$$Y'_0 = -\int \Pi_0(x_0, y_0, z_0) \cos(N_0, y)\, ds_{23},$$

$$Z'_0 = -\int \Pi_0(x_0, y_0, z_0) \cos(N_0, z)\, ds_{23},$$

en sorte qu'en vertu de la première égalité (3),

$$\int \Pi_0(x_0, y_0, z_0) [\cos(N, x) - \cos(N_0, x)]\, ds_{23} = Y'_0 n(t) - Z'_0 m(t).$$

D'ailleurs, en l'état d'équilibre, on a

$$Y_0 + Y'_0 = 0, \qquad Z_0 + Z'_0 = 0.$$

On a aussi

$$Y_0 = -\int \frac{\partial U(x_0, y_0, z_0)}{\partial y_0}\, dm_3, \qquad Z_0 = -\int \frac{\partial U(x_0, y_0, z_0)}{\partial z_0}\, dm_3,$$

ce qui permet d'écrire

$$(21) \qquad \begin{aligned} &\int \Pi_0(x_0, y_0, z_0) [\cos(N, x) - \cos(N_0, x)]\, ds_{23} \\ &\quad = n(t) \int \frac{\partial U(x_0, y_0, z_0)}{\partial y_0}\, dm_3 - m(t) \int \frac{\partial U(x_0, y_0, z_0)}{\partial z_0}\, dm_3. \end{aligned}$$

Si l'on observe enfin que, dans l'état d'équilibre,

$$X_0 + X'_0 = 0,$$

les équations (10), (19), (20) et (21) donneront

$$(22) \qquad \begin{aligned} X(t) + X'(t) = &- A_{11} f(t) - A_{12} g(t) - A_{13} h(t) \\ &- A_{14} l(t) - A_{15} m(t) - A_{16} n(t) \\ &- \int \rho_0(x_0, y_0, z_0) \left[\frac{\partial^2 \psi(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t^2} + C \right] \cos(N_0, x)\, ds_{23}. \end{aligned}$$

Les coefficients A_{ij} ont, en cette égalité et dans les égalités analogues, les expressions que nous avions données en notre Mémoire *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants* [1]; il faut avoir soin, tou-

[1] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. I, 1895, pp. 155-159.

tefois, de supposer nulle, en ces expressions, la densité du fluide 1.

Selon le principe de d'Alembert, pour mettre en équations le problème du mouvement du solide, il suffit d'écrire que les conditions d'équilibre de ce solide seraient vérifiées si ce corps était soumis :

1° Aux forces extérieures qui le sollicitent réellement ;

2° Aux actions de liaisons représentées par les pressions du fluide ;

3° Aux forces d'inertie.

Nous obtenons ainsi six équations dont la première est

$$X(t) + X'(t) + \xi(t) = 0$$

ou bien, en vertu des égalités (9) et (22),

$$
\begin{aligned}
(23)\quad & A_{11} f(t) + A_{12}\, g(t) + A_{13}\, h(t) + A_{14}\, l(t) + A_{15}\, m(t) + A_{16}\, n(t) \\
& + \mathfrak{M} \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + M_z \frac{d^2 m(t)}{dt^2} - M_y \frac{d^2 n(t)}{dt^2} \\
& + \int \rho_0(x_0, y_0, z_0) \left[\frac{\partial^2 \psi(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t^2} + C \right] \cos(N_0, x)\, ds_{23} = 0.
\end{aligned}
$$

Le terme

$$\int \rho_0(x_0, y_0, z_0) \left[\frac{\partial^2 \psi(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t^2} + C \right] \cos(N_0, x)\, ds_{23}$$

et les termes correspondants qui figurent dans les cinq équations analogues à l'équation (23) compliquent étrangement le problème.

Poisson, Duhamel et tous les anciens auteurs faisaient abstraction de ces termes ; ils obtenaient ainsi des équations particulièrement faciles à intégrer, car ces équations, où rien ne dépendait plus du mouvement du fluide, étaient simplement linéaires et à coefficients constants. Cette méthode était entièrement illégitime, puisque les termes négligés étaient du même ordre que les termes conservés. Clebsch a très justement condamné cette théorie simplifiée.

Les termes négligés par Poisson et Duhamel dépendent des petits mouvements qui animent le fluide. Mais on ne peut songer à déterminer d'abord ces petits mouvements sans se préoccuper du mouvement du solide, puis, une fois les petits mouvements du liquide connus, à calculer le dernier terme de chacune des équations du mouvement du solide. Les petits mouvements du liquide ne peuvent être déterminés indépendamment des mouvements du solide, car la condition (5) doit être vérifiée, à chaque instant, en chaque point de la surface s_{23}.

La détermination des petits mouvements du liquide et la détermination des petits mouvements du solide ne constituent donc pas deux problèmes distincts qui puissent être traités indépendamment l'un de l'autre ou résolus l'un après l'autre; elles sont liées l'une à l'autre d'une manière indissoluble et sont l'objet d'un problème unique.

III. — Étude des petits mouvements du fluide.

Rappelons brièvement comment les petits mouvements du fluide sont déterminés.

En tout point (x, y, z) de la région de l'espace que le fluide remplit en l'état d'équilibre, on a, à tout instant ([1]),

$$(24)\quad \frac{d^2\varphi[\rho_0(x,y,z)]}{d\rho_0^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right]-\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-C=0.$$

En tout point de la surface libre σ qui termine le fluide au moment de l'équilibre, on a

$$\rho_0\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}+C\right)-\frac{\partial \Pi_0}{\partial n}\frac{\partial\psi}{\partial n}=0,$$

n étant la normale à la surface, dirigée vers l'intérieur du fluide.

En tout point de la surface invariable du vase qui contient le système, on a

$$(26)\quad \frac{\partial\psi(x,y,z,t)}{\partial n}=0,$$

n étant la normale à cette surface.

Enfin, en tout point de la surface mouillée du solide en sa position d'équilibre, on a l'égalité (5).

La fonction $[\psi(x,y,z,t)+Ct^2]$ a, par rapport à x, y, z, les mêmes

([1]) P. Duhem, *Sur la stabilité et les petits mouvements des corps fluides*, Chap. III (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. IX, 1903, p. 282). La constante C qui figure en cet écrit est égale et de signe contraire à celle qui figure ici.

dérivées que la fonction $\psi(x, y, z, t)$; elle peut donc, comme celle-ci, jouer le rôle de fonction potentielle des élongations; adoptons désormais cette nouvelle fonction potentielle des élongations et continuons de la désigner par $\psi(x, y, z, t)$. Les équations (24) et (25) deviendront

$$(24\ bis)\qquad \frac{d^2\varphi[\rho_0(x,y,z)]}{d\rho_0^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right]-\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0,$$

$$(25\ bis)\qquad \rho_0\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\frac{\partial \Pi_0}{\partial n}\frac{\partial\psi}{\partial n}=0,$$

tandis que les conditions (26) et (5) demeureront sans aucun changement.

Lorsque nous adopterons cette nouvelle détermination de la fonction ψ, nous ne devrons pas oublier d'*effacer la constante* C aux premiers membres de l'équation (23) et des cinq autres équations du mouvement du corps solide.

Dès maintenant, examinons quelques questions.

En premier lieu, le fluide peut-il prendre un mouvement tel que le solide demeure immobile?

Si le solide doit demeurer immobile, la surface s_{23} le long de laquelle le fluide le baigne forme une partie de la paroi du vase; la condition (26) doit être vérifiée en tout point de cette surface comme elle l'est en tout point de la paroi du vase. Les conditions (24 *bis*), (25 *bis*) et (26) déterminent alors la fonction ψ et, partant, le mouvement du fluide.

La pression $\Pi(x_0, y_0, z_0, t)$ en tout point de la surface immobile s_{23} sera, dès lors, donnée par l'égalité (18), où nous devrons effacer la constante C et faire

$$x-x_0=0,\qquad y-y_0=0,\qquad z-z_0=0.$$

Nous aurons donc

$$\Pi(x_0,y_0,z_0,t)=\Pi_0(x_0,y_0,z_0)+\rho_0(x_0,y_0,z_0)\frac{\partial^2\psi(x_0,y_0,z_0,t)}{\partial t^2}.$$

Les pressions $\Pi(x_0, y_0, z_0, t)$ doivent, à chaque instant, faire équilibre aux actions extérieures qui s'exercent réellement sur le flotteur, comme les pressions $\Pi_0(x_0, y_0, z_0)$ leur faisaient équilibre. Pour cela, il faut et il suffit que la fonction ψ, déterminée par les conditions précédentes, vérifie à chaque instant les six équations

$$\int \rho_0(x_0, y_0, z_0)\frac{\partial^2\psi(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t^2}\cos(N_0, x)\,ds_{23} = 0, \quad \ldots,$$

$$\int \rho_0(x_0, y_0, z_0)\frac{\partial^2\psi(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t^2}[y_0\cos(N_0, z) - z_0\cos(N_0, y)]\,ds_{23} = 0, \quad \ldots.$$

Il est clair qu'il n'en pourra être ainsi que dans des cas extrêmement particuliers ; en général, le fluide ne pourra prendre aucun mouvement qui laisse le flotteur immobile.

En étudiant la stabilité de l'équilibre d'un flotteur, nous avons été amené ([1]) à imposer au système du solide et du fluide, à partir de l'état d'équilibre, un déplacement virtuel composé de la manière suivante : Le déplacement du flotteur est un déplacement quelconque ; le déplacement du fluide est ce que nous avons appelé un *déplacement associé* au déplacement du flotteur.

Considérons, à l'instant t, le déplacement que le fluide et le corps flottant ont éprouvé à partir de leur position d'équilibre, et demandons-nous si le déplacement du fluide peut être regardé comme *associé* au déplacement du flotteur.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'on ait :

1° En tout point de l'espace occupé par le fluide,

$$\rho(x, y, z, t) - \rho_0(x, y, z) = \frac{\theta}{\dfrac{d^2\varphi[\rho_0(x, y, z)]}{d\rho_0^2}}; \tag{27}$$

2° En tout point de la surface libre σ qui terminait le fluide en équilibre,

$$\begin{aligned} a(x_0, y_0, z_0, t)\cos(n, x) &+ b(x_0, y_0, z_0, t)\cos(n, y) \\ &+ c(x_0, y_0, z_0, t)\cos(n, z) = \frac{\theta}{\dfrac{\partial V(x_0, y_0, z_0)}{\partial n}}. \end{aligned} \tag{28}$$

En ces conditions, θ est une certaine forme linéaire et homogène des

([1]) P. Duhem, *Sur la stabilité de l'équilibre d'un corps flottant à la surface d'un fluide compressible*, égalités (6) et (7) (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. III, 1897, p. 394).

six quantités $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$, $l(t)$, $m(t)$, $n(t)$: les coefficients de cette forme sont indépendants des variables x, y, z.

Une formule bien connue nous donne la dilatation infiniment petite de la particule fluide dont un point, situé en (x_0, y_0, z_0) au moment de l'équilibre, est venu en (x, y, z) à l'instant t. Cette formule est

$$\begin{aligned}&\rho(x, y, z, t) - \rho_0(x_0, y_0, z_0)\\ &\quad = -\rho_0(x_0, y_0, z_0)\left[\frac{\partial a(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial x_0} + \frac{\partial b(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial y_0} + \frac{\partial c(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial z_0}\right].\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\rho_0(x, y, z) - \rho_0(x_0, y_0, z_0) = {} & \frac{\partial \rho_0(x_0, y_0, z_0)}{\partial x_0} a(x_0, y_0, z_0, t)\\ & + \frac{\partial \rho_0(x_0, y_0, z_0)}{\partial y_0} b(x_0, y_0, z_0, t)\\ & + \frac{\partial \rho_0(x_0, y_0, z_0)}{\partial z_0} c(x_0, y_0, z_0, t).\end{aligned}$$

Ces deux égalités, jointes aux égalités (4), donnent l'égalité

$$\begin{aligned}\rho(x, y, z, t) - \rho_0(x, y, z) = {} & \frac{\partial}{\partial x_0}\left[\rho_0(x_0, y_0, z_0)\frac{\partial \psi(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial x_0}\right]\\ & + \frac{\partial}{\partial y_0}\left[\rho_0(x_0, y_0, z_0)\frac{\partial \psi(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial y_0}\right]\\ & + \frac{\partial}{\partial z_0}\left[\rho_0(x_0, y_0, z_0)\frac{\partial \psi(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial z_0}\right]\end{aligned}$$

qu'on peut écrire, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier,

$$(29)\qquad \begin{aligned}\rho(x, y, z, t) - \rho_0(x, y, z) = {} & \frac{\partial}{\partial x}\left[\rho_0(x, y, z)\frac{\partial \psi(x, y, z, t)}{\partial x}\right]\\ & + \frac{\partial}{\partial y}\left[\rho_0(x, y, z)\frac{\partial \psi(x, y, z, t)}{\partial y}\right]\\ & + \frac{\partial}{\partial z}\left[\rho_0(x, y, z)\frac{\partial \psi(x, y, z, t)}{\partial z}\right].\end{aligned}$$

Les égalités (24 *bis*), (27) et (29) exigeraient que l'on eût, en tout point de l'espace occupé par la masse fluide,

$$(30)\qquad \frac{\partial^2 \psi(x, y, z, t)}{\partial t^2} = 0.$$

En vertu des égalités (4), la condition (28) peut s'écrire

$$\frac{\partial\psi(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial n}\frac{\partial V(x_0, y_0, z_0)}{\partial n} + \theta = 0.$$

D'autre part, les lois de l'Hydrostatique donnent

$$\frac{\partial \Pi_0(x_0, y_0, z_0)}{\partial n} + \rho_0(x_0, y_0, z_0)\frac{\partial V(x_0, y_0, z_0)}{\partial n} = 0.$$

Ces égalités, jointes à l'égalité (25 *bis*), exigeraient que la condition (30) fût vérifiée en tout point de la surface libre du fluide en équilibre.

La condition (30) *représenterait donc la condition nécessaire et suffisante pour qu'à l'instant t, le déplacement du fluide fût un déplacement* ASSOCIÉ *à celui du flotteur.*

Si nous nous souvenons que θ ne dépend pas de x, y, z, la condition (30), jointe aux égalités (4), nous donne, en tout point de la masse fluide,

$$(31) \quad \frac{\partial^2 a(x, y, z, t)}{\partial t^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 b(x, y, z, t)}{\partial t^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 c(x, y, z, t)}{\partial t^2} = 0.$$

Ces égalités, jointes à la signification des quantités a, b, c, nous donnent la proposition suivante :

Pour qu'à l'instant t le déplacement du fluide puisse être regardé comme ASSOCIÉ *au deplacement du flotteur, il faut qu'à cet instant chacune des particules fluides ait une accélération nulle.*

Si, à tout instant t, le déplacement du fluide était associé au déplacement du solide, nous dirions que le mouvement du fluide est un *mouvement associé* au mouvement du flotteur. Pour qu'il en fût ainsi, il faudrait que chaque particule fluide eût une accélération constamment nulle ou, en d'autres termes, qu'elle se mût d'un mouvement rectiligne et uniforme; mais un tel mouvement ne peut demeurer infiniment petit, à moins qu'il se réduise à l'immobilité ; d'où cette proposition :

Pour que le mouvement du fluide puisse être regardé comme ASSOCIÉ *au mouvement du flotteur, il faut et il suffit que le fluide demeure constamment immobile.*

Si la surface mouillée du solide est de révolution autour d'un certain axe, et si le mouvement du flotteur se réduit à une rotation autour de cet axe, le fluide pourra demeurer constamment immobile; *hors ce cas, il n'est pas possible que le mouvement infiniment petit du fluide et le mouvement infiniment petit du flotteur soient* ASSOCIÉS *l'un à l'autre.*

IV. — Mise en équations du problème des petites oscillations pendulaires d'un flotteur.

Pour que les mouvements du flotteur soient pendulaires, il faut et il suffit que l'on ait six égalités de la forme

$$(32)\quad \begin{cases} f\,(t) = \varepsilon\left(\mathrm{F}\,\sin 2\pi\frac{t}{\mathrm{T}} + \mathrm{F}'\,\cos 2\pi\frac{t}{\mathrm{T}}\right), \\ g\,(t) = \varepsilon\left(\mathrm{G}\,\sin 2\pi\frac{t}{\mathrm{T}} + \mathrm{G}'\,\cos 2\pi\frac{t}{\mathrm{T}}\right), \\ h\,(t) = \varepsilon\left(\mathrm{H}\,\sin 2\pi\frac{t}{\mathrm{T}} + \mathrm{H}'\,\cos 2\pi\frac{t}{\mathrm{T}}\right), \\ l\,(t) = \varepsilon\left(\mathrm{L}\,\sin 2\pi\frac{t}{\mathrm{T}} + \mathrm{L}'\,\cos 2\pi\frac{t}{\mathrm{T}}\right), \\ m(t) = \varepsilon\left(\mathrm{M}\,\sin 2\pi\frac{t}{\mathrm{T}} + \mathrm{M}'\,\cos 2\pi\frac{t}{\mathrm{T}}\right), \\ n\,(t) = \varepsilon\left(\mathrm{N}\,\sin 2\pi\frac{t}{\mathrm{T}} + \mathrm{N}'\,\cos 2\pi\frac{t}{\mathrm{T}}\right), \end{cases}$$

où

$$(33)\qquad \mathrm{F},\quad \mathrm{G},\quad \mathrm{H},\quad \mathrm{L},\quad \mathrm{M},\quad \mathrm{N}$$

et

$$(33\,bis)\qquad \mathrm{F}',\quad \mathrm{G}',\quad \mathrm{H}',\quad \mathrm{L}',\quad \mathrm{M}',\quad \mathrm{N}'$$

sont douze constantes, et ε une quantité infiniment petite indépendante de t.

Nous admettrons, en même temps, que le mouvement du fluide est un mouvement pendulaire de même période T, ce qui revient, comme l'on sait, à attribuer au potentiel des élongations la forme

$$(34) \qquad \psi(x, y, z, t) = \varepsilon\left[\Psi(x, y, z)\sin 2\pi\frac{t}{T} + \Psi'(x, y, z)\cos 2\pi\frac{t}{T}\right],$$

où ε représente la même quantité infiniment petite, indépendante de x, y, z, t, que dans les équations (32).

Si dans les équations (5), (23), (24 *bis*), (25 *bis*) et (26) qui régissent le mouvement du système, nous substituons les valeurs (32) et (34) de f, g, h, l, m, n, ψ, nous obtenons des équations au sujet desquelles on peut faire les deux remarques suivantes :

1° Le premier membre de chacune d'elles est affecté du facteur ε qui peut être biffé ;

2° Ce premier membre est linéaire et homogène en $\sin 2\pi\frac{t}{T}$ et $\cos 2\pi\frac{t}{T}$; pour qu'il soit nul quel que soit t, il faut et il suffit que les coefficients de $\sin 2\pi\frac{t}{T}$ et de $\cos 2\pi\frac{t}{T}$ soient séparément nuls, en sorte que chacune de nos équations se scinde en deux autres.

Nous obtenons donc ainsi deux groupes de conditions. Le premier groupe, où figurent seulement la fonction $\Psi(x, y, z)$ et les six constantes

$$(33) \qquad F, \quad G, \quad H, \quad L, \quad M, \quad N,$$

est le suivant :

1° En tout point (x, y, z) de la région que le fluide occupe en l'état d'équilibre, on a l'égalité

$$(35) \qquad \frac{d^2\varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\right] + \frac{4\pi^2}{T^2}\Psi = 0;$$

2° En tout point de la paroi immobile qui contient le fluide, on a

$$(36) \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial n} = 0;$$

3° En tout point de la surface libre σ qui borne le fluide en équilibre, on a

$$(37) \qquad \frac{\partial V}{\partial n}\frac{\partial\Psi}{\partial n} - \frac{4\pi^2}{T^2}\Psi = 0;$$

4° En tout point de la surface s_{23} du flotteur que baigne le fluide lorsque l'équilibre est établi, on a

$$(38)\quad (F + z_0 M - y_0 N)\cos(N_0.x) + (G + x_0 N - z_0 L)\cos(N_0.y) + (H + y_0 L - x_0 M)\cos(N_0.z) + \frac{\partial \Psi}{\partial N_0} = 0;$$

5° On a, enfin, six équations dont la première est

$$(39)\quad A_{11}F + A_{12}G + A_{13}H + A_{14}L + A_{15}M + A_{16}N - \frac{4\pi^2}{T^2}\left[\mathfrak{M} F + M_z M - M_y N + \int \rho_0 \Psi \cos(N_0.x)\, ds_{23}\right] = 0.$$

La fonction $\Psi'(x, y, z)$ et les six constantes

$$(33\ bis)\qquad F',\quad G',\quad H',\quad L',\quad M',\quad N'$$

sont soumises à des conditions toutes semblables.

V. — Réduction du problème précédent à un problème de calcul des variations.

Considérons, d'une part, l'expression

$$(8)\quad \mathfrak{T} = \mathfrak{M}(F^2 + G^2 + H^2) + 2F(M_z M - M_y N) + 2G(M_x N - M_z L) + 2H(M_y L - M_x M) + J_x L^2 + J_y M^2 + J_z N^2 - 2P_{yz} MN - 2P_{zx} NL - 2P_{xy} LM$$

et l'expression

$$(40)\qquad \tau = \int_2 \rho_0 \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2\right] d\varpi_2,$$

où l'intégrale s'étend à tous les éléments $d\varpi_2$ du volume 2 que le fluide remplit en l'état d'équilibre.

Considérons, d'autre part, l'expression

$$(41)\quad \mathfrak{Q} = A_{11}F^2 + A_{22}G^2 + A_{33}H^2 + A_{44}L^2 + A_{55}M^2 + A_{66}N^2 + 2A_{23}GH + 2A_{31}HF + 2A_{12}FG + 2A_{14}FL + 2A_{15}FM + 2A_{16}FN + 2A_{24}GL + 2A_{25}GM + 2A_{26}GN + 2A_{34}HL + 2A_{35}HN + 2A_{36}HN + 2A_{56}MN + 2A_{64}NL + 2A_{45}LM.$$

et l'expression

$$(42)\quad \Omega = -\int_\sigma \rho_0 \frac{\partial V}{\partial n}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial n}\right)^2 d\sigma$$
$$+\int_2 \frac{d^2\varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)\right]^2 d\varpi_2,$$

en laquelle la première intégrale s'étend à la surface libre σ qui termine le fluide en l'état d'équilibre, et la seconde intégrale au volume 2 que le fluide occupe en ce même état.

Comme nous l'avons remarqué, la quantité $\mathfrak{S}$ est positive toutes les fois que l'on n'a pas à la fois les six égalités

$$F = 0, \qquad G = 0, \qquad H = 0,$$
$$L = 0, \qquad M = 0, \qquad N = 0.$$

La quantité $\mathfrak{T}$ est également positive, à moins que l'on ait, en tout point du fluide,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0.$$

Nous pouvons évidemment considérer un déplacement du système que nous nommerons le déplacement (εW) et que nous définirons de la manière suivante :

1° Le solide éprouve une translation dont les composantes suivant Ox, Oy, Oz sont

$$\varepsilon F, \quad \varepsilon G, \quad \varepsilon H,$$

et autour des axes Ox, Oy, Oz, des rotations

$$\varepsilon L, \quad \varepsilon M, \quad \varepsilon N.$$

2° Chaque point du fluide éprouve un déplacement dont les composantes sont

$$-\varepsilon\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \qquad -\varepsilon\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \qquad -\varepsilon\frac{\partial \Psi}{\partial z}.$$

En ces formules ε est une quantité infiniment petite indépendante de x, y, z.

Quelles que soient les six constantes F, G, H, L, M, N et la fonction Ψ, un tel déplacement sera un déplacement virtuel du système s'il vérifie les conditions suivantes :

1° On a

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0 \tag{36}$$

en tout point de la paroi immobile ;

2° On a l'égalité

$$\begin{aligned}(F + z_0 M - y_0 N)\cos(N_0, x) + (G + x_0 N - z_0 L)\cos(N_0, y) \\ + (H + y_0 L - x_0 M)\cos(N_0, z) + \frac{\partial \Psi}{\partial N_0} = 0\end{aligned} \tag{38}$$

en tout point de la paroi.

D'après ce que nous venons de voir, tout déplacement virtuel (εW) qui ne se réduit pas à l'absence de tout déplacement fait prendre à la quantité $(\mathfrak{T} + \tau)$ une valeur positive.

Un premier déplacement virtuel (εW) ayant été défini, on en obtiendra un second en multipliant par un même nombre k les six constantes F, G, H, L, M, N et la fonction Ψ ; en ce second déplacement, la somme $(\mathfrak{T} + \tau)$ prendra une valeur k^2 fois plus grande que dans le premier. On obtiendra donc aisément tous les déplacements virtuels (εW) possibles si l'on forme tous ceux pour lesquels

$$\mathfrak{T} + \tau = 1. \tag{43}$$

Désignons par (εW_1) tout déplacement virtuel (εW) qui vérifie cette condition (43).

Proposons-nous le problème suivant :

Chercher un déplacement virtuel (εW_1) *tel que la somme* $(\mathfrak{Q} + \Omega)$ *éprouve une variation d'ordre supérieur au premier lorsqu'on remplace ce déplacement virtuel par un autre déplacement virtuel* $(\varepsilon W'_1)$, *de même espèce que le premier, infiniment voisin du premier, mais quelconque d'ailleurs.*

Soient

$$\delta F,\quad \delta G,\quad \delta H,\quad \delta L,\quad \delta M,\quad \delta N,\quad \delta \Psi \tag{44}$$

les variations qu'éprouvent les six constantes F, G, H, L, M, N et la fonction Ψ lorsqu'on substitue le déplacement $(\varepsilon W'_1)$ au déplacement (εW_1).

Le déplacement $(\varepsilon W'_1)$ doit vérifier les conditions (36), (38) et (43) que, déjà, le déplacement (εW_1) vérifie par hypothèse ; pour cela, il faut et il suffit que l'on ait :

1° En tout point de la surface immobile du vase,

$$\frac{\partial\, \delta\Psi}{\partial n} = 0; \tag{45}$$

2° En tout point de la surface mouillée S_{23} du flotteur,

$$\begin{aligned}(\delta F + z_0 \delta M - y_0 \delta N)\cos(N_0, x) \\ + (\delta G + x_0 \delta N - z_0 \delta L)\cos(N_0, y) \\ + (\delta H + y_0 \delta L - x_0 \delta M)\cos(N_0, z) + \frac{\partial\, \delta\Psi}{\partial N_0} = 0;\end{aligned} \tag{46}$$

3°

$$\delta(\mathfrak{T} + \tau) = 0. \tag{47}$$

Nous voulons que ces conditions entraînent celle-ci :

$$\delta(\mathfrak{Q} + \Omega) = 0. \tag{48}$$

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'il existe une quantité λ, indépendante des variations (44), telle que l'égalité

$$\delta(\mathfrak{Q} + \Omega) - \lambda\, \delta(\mathfrak{T} + \tau) = 0 \tag{49}$$

soit une conséquence des seules conditions (45) et (46).

Or, nous trouvons sans peine

$$\frac{1}{2}\delta\mathfrak{Q} = (A_{11}F + A_{12}G + A_{13}H + A_{14}L + A_{15}M + A_{16}N)\delta F + \ldots, \tag{50}$$

$$\frac{1}{2}\delta\mathfrak{T} = (\mathfrak{M}F + M_z M - M_y N)\delta F + \ldots, \tag{51}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\delta\Omega = &-\int \rho_0 \frac{\partial V}{\partial n}\frac{\partial \Psi}{\partial n}\frac{\partial\, \delta\Psi}{\partial n}\, d\sigma \\ &+ \int_{S_2} \frac{d^2\varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)\right] \\ &\qquad \times \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial\, \delta\Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial\, \delta\Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial\, \delta\Psi}{\partial z}\right)\right] d\varpi_2,\end{aligned} \tag{52}$$

$$\frac{1}{2}\delta\tau = \int_{S_2} \rho_0 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\,\partial\frac{\delta\Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\,\partial\frac{\delta\Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial z}\,\partial\frac{\delta\Psi}{\partial z}\right) d\varpi_2. \tag{53}$$

Une intégration par parties, jointe aux conditions (45) et (46), transforme aisément l'égalité (53) en la suivante :

$$(53\ bis)\quad \frac{1}{2}\delta\tau = -\int \rho_0 \Psi \frac{\partial \delta\Psi}{\partial n}\, d\sigma + \delta F \int \rho_0 \Psi \cos(N_0, x)\, ds_{23} + \dots$$
$$- \int_2 \Psi \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial \delta\Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial \delta\Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial \delta\Psi}{\partial z}\right)\right] d\varpi_2.$$

Moyennant les égalités (50), (51), (52) et (53 *bis*), l'égalité (49) devient

$$(54)\quad \Big\{ A_{11} F + A_{12} G + A_{13} H + A_{14} L + A_{15} M + A_{16} N$$
$$- \lambda \left[\mathfrak{M} F + M_z M - M_y N + \int \rho_0 \Psi \cos(N_0, x)\, ds_{23} \right] \Big\} \delta F + \dots$$
$$- \int \rho_0 \left(\frac{\partial N}{\partial n} \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \lambda \Psi \right) \frac{\partial \delta\Psi}{\partial n}\, d\sigma$$
$$+ \int_2 \left\{ \frac{d^2\varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)\right] + \lambda \Psi \right\}$$
$$\times \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial \delta\Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial \delta\Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial \delta\Psi}{\partial z}\right)\right] d\varpi_2 = 0.$$

Cette condition exige tout d'abord que la quantité

$$(55)\qquad P = \frac{d^2\varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)\right]$$

ait la même valeur en tous les points du volume que le fluide occupe au moment de l'équilibre.

Supposons, en effet, qu'il n'en soit pas ainsi, et montrons qu'il en résulte une contradiction.

S'il n'en était pas ainsi, nous pourrions, et d'une infinité de manières, choisir une grandeur p telle que P prît certainement, en certaines parties du système, des valeurs supérieures à p et, en certaines autres, des valeurs inférieures à p. Nous pourrions donc partager le volume 2 que le fluide occupe, au moment de l'équilibre, en deux volumes, connexes ou non, u et u', qui posséderaient les propriétés suivantes : En tout point du volume u, P est au moins égal à p et, en certaines parties de ce volume, P surpasse p ; en tout point du volume u', P est au plus égal à p et, en certaines parties de ce volume, P est inférieur à p.

Cela posé, concevons une fonction $j(x, y, z)$, continue à l'intérieur du volume 2, et douée des propriétés suivantes, qu'on peut lui assurer d'une infinité de manières :

La fonction j est nulle en tout point où P est égal à p, positive en tout point où P surpasse p, négative en tout point où P est inférieur à p; en outre, on a

$$\int_2 j\, d\varpi_2 = 0. \tag{56}$$

Ces conditions entraînent les deux égalités

$$\int_u j\, du = \mathrm{J}, \qquad \int_{u'} j\, du' = -\mathrm{J}, \tag{57}$$

où J est une quantité positive.

Formons maintenant le problème de conductibilité de la chaleur dont voici l'énoncé :

Le volume 2 que le fluide remplit au moment de l'équilibre est occupé par un corps conducteur; en chaque point, le coefficient de conductibilité est mesuré par le nombre $\rho_0(x, y, z)$; chaque élément $d\varpi_2$ du volume 2 dégage dans le temps dt une quantité de chaleur $j\, d\varpi_2\, dt$; enfin, le volume 2 est entouré de toutes parts de corps non conducteurs de la chaleur.

La condition (56) permet qu'une distribution permanente de températures s'établisse sur le corps conducteur. Soit $\mathfrak{T}(x, y, z)$ la température au point (x, y, z) lorsque cette distribution est établie. On sait que l'on a, en tout point du volume (2),

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z}\right) = -j \tag{58}$$

et, en tout point des surfaces qui limitent le volume 2,

$$\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial n} = 0. \tag{59}$$

Cette égalité (59) nous montre que nous pourrons prendre, en tout point du système

$$\delta \Psi = \mu \mathfrak{T},$$

μ étant une quantité positive, infiniment petite, indépendante de x, y, z, en même temps que nous ferons

$$\delta F = 0, \quad \delta G = 0, \quad \delta H = 0, \quad \delta L = 0, \quad \delta M = 0, \quad \delta N = 0.$$

Mais alors la condition 2 se réduira à l'égalité

$$\int_2 P j \, d\varpi_2 = 0$$

que la condition (56) permet d'écrire :

$$\int_u (P - p) j \, du + \int_{u'} (P - p) j \, du' = 0.$$

Or cette égalité ne saurait avoir lieu ; le produit $(P - p)j$ n'est négatif en aucun point du système et, en chacun des volumes u et u', il existe des régions où il est positif.

La condition (54) exige donc que la quantité P ait une même valeur en tout point du volume 2 ; si nous désignons cette valeur par $-\lambda K$, K étant une quantité indépendante de x, y, z, nous pourrons dire que cette condition (54) exige que l'on ait, en tout point du volume occupé par le fluide au moment de l'équilibre,

$$(60) \quad \frac{d^2\varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)\right] + \lambda(\Psi + K) = 0.$$

Introduisons cette condition (60) dans l'égalité (54) ; celle ci deviendra aisément, à l'aide d'une intégration par parties, et en tenant compte de la condition (46),

$$(61) \quad \begin{cases} A_{11}F + A_{12}G + A_{13}H + A_{14}L + A_{15}M + A_{16}N \\ \quad - \lambda\left[\mathfrak{M} F + M_z M - M_y N + \int_{s_{23}} \rho_0(\Psi + K)\cos(N_0, x)\, ds_{23}\right] \end{cases} \delta F + \ldots$$
$$- \int \rho_0 \left[\frac{\partial V}{\partial n}\frac{\partial \Psi}{\partial n} - \lambda(\Psi + K)\right]\frac{\partial\, \delta\Psi}{\partial n}\, d\sigma = 0.$$

Il est facile de voir que cette égalité (61) exige qu'en tout point de la surface libre σ qui bornait le fluide au moment de l'équilibre, on ait

$$\frac{\partial V}{\partial n}\frac{\partial \Psi}{\partial n} - \lambda(\Psi + K) = 0. \tag{62}$$

Imaginons, en effet, qu'en un certain point de la surface σ, le premier nombre de cette égalité ne soit pas égal à zéro et qu'il y soit, par exemple, positif; par raison de continuité, il devra exister sur la surface σ une certaine aire finie a, comprenant le point considéré, et telle que le premier membre de l'égalité (62) soit positif en tout point de l'aire a.

Au sein du volume 2, nous pouvons d'une infinité de manières construire une fonction continue $f(x, y, z)$ telle qu'en tout point de l'aire a, $\frac{\partial f}{\partial n}$ soit positif, et que cette même quantité soit nulle en tout autre point de la surface qui enclôt le volume 2.

Posons

$$\delta\Psi = \mu f,$$

μ étant une quantité positive, infiniment petite, indépendante de x, y, z. $\frac{\partial\,\delta\Psi}{\partial n}$ sera nul en tout point de la surface qui entoure le volume 2, sauf aux divers points de l'aire a; aux divers points de cette aire a, $\frac{\partial\,\delta\Psi}{\partial n}$ sera positif. Nous pourrons évidemment adopter cette détermination de $\delta\Psi$, à la condition de prendre en même temps

$$\delta F = 0, \qquad \delta G = 0, \qquad \delta H = 0, \qquad \delta L = 0, \qquad \delta M = 0, \qquad \delta N = 0.$$

La condition (61) se réduira alors à

$$\int_a \rho_0 \left[\frac{\partial V}{\partial n}\frac{\partial \Psi}{\partial n} - \lambda(\Psi + K)\right]\frac{\partial\,\delta\Psi}{\partial n}\,da = 0.$$

Mais elle ne pourra être vérifiée, puisque, en tout point de l'aire a, les trois quantités

$$\rho_0, \quad \frac{\partial V}{\partial n}\frac{\partial \Psi}{\partial n} - \lambda(\Psi + K), \quad \frac{\partial\,\delta\Psi}{\partial n}$$

sont positives.

La condition (62) doit donc être vérifiée en tout point de la surface σ.

La condition (61) se réduit alors à

$$\left\{\begin{aligned} & A_{11}F + A_{12}G + A_{13}H + A_{14}L + A_{15}M + A_{16}N \\ & -\lambda\left[\mathfrak{M}F + M_zM - M_yN + \int_{s_{23}} \rho_0(\Psi + K)\cos(N_0, x)\,ds_{23}\right]\end{aligned}\right\}\delta F + \ldots = 0.$$

Pour que cette condition soit vérifiée quels que soient δF, δG, δH, δL, δM, δN, il faut et il suffit que l'on ait six équations dont la première est

$$(63)\quad \begin{aligned} & A_{11}F + A_{12}G + A_{13}H + A_{14}L + A_{15}M + A_{16}N \\ & -\lambda\left[\mathfrak{M}F + M_zM - M_yN + \int_{s_{23}} \rho_0(\Psi + K)\cos(N_0, x)\,ds_{23}\right] = 0.\end{aligned}$$

Les équations (60), (62) et (63) sont donc requises pour que la condition (54) soit vérifiée; qu'elles soient en même temps suffisantes à cet effet, c'est ce qui ressort de la marche même de la démonstration.

Ainsi, *pour que les six quantités* F, G, H, L, M, N, *jointes à la fonction* $\Psi(x, y, z)$, *soient une solution du problème posé, il faut et il suffit qu'il existe deux constantes* K *et* λ *telles que les équations* (60), (62) *et* (63) *soient vérifiées, et que la condition* (43) *soit, en outre, vérifiée.*

A ce premier théorème, nous allons en adjoindre un second :

Une solution

$$F,\quad G,\quad H,\quad L,\quad M,\quad N,\quad \Psi(x, y, z)$$

du problème posé fait prendre une valeur déterminée à la somme $(\mathfrak{Q} + \Omega)$ *: cette valeur est égale à la constante* λ *qui correspond à cette solution.*

En effet, l'égalité (63), comparée à l'égalité (41) et à l'égalité (8), donne aisément

$$(64)\quad \begin{aligned} \mathfrak{Q} = \lambda\mathfrak{S} + \lambda\int_{s_{23}} \rho_0(\Psi + K)\Big[& (F + z_0M - y_0N)\cos(N_0, x) \\ & + (G + x_0N - z_0L)\cos(N_0, y) \\ & + (H + y_0L - x_0M)\cos(N_0, z)\Big]\,ds_{23}.\end{aligned}$$

De même, en vertu des égalités (60) et (62), l'égalité (42) devient

$$\Omega = -\lambda \int_\sigma \rho_0 (\Psi + \mathrm{K}) \frac{\partial \Psi}{\partial n} d\sigma$$
$$-\lambda \int_2 (\Psi + \mathrm{K}) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \right] d\varpi_2.$$

A l'aide d'une intégration par parties, et en tenant compte de l'égalité (40) et de la condition (36), cette dernière égalité devient

$$(65) \qquad \Omega = \lambda \tau + \lambda \int_{s_{23}} \rho_0 (\Psi + \mathrm{K}) \frac{\partial \Psi}{\partial \mathrm{N}_0} ds_{23}.$$

Si l'on tient compte de la condition (38), les égalités (64) et (65) donnent

$$(66) \qquad \mathfrak{Q} + \Omega = \lambda (\mathfrak{T} + \tau)$$

ou bien, en vertu de l'égalité (43),

$$(67) \qquad \mathfrak{Q} + \Omega = \lambda.$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Imaginons maintenant que six quantités F, G, H, L, M, N et une certaine fonction $\Psi(x, y, z)$, assujetties aux conditions (36) et (38), *mais non pas à la condition* (43), puissent être associées à deux constantes K et λ de telle sorte que les équations (60), (62) et (63) soient vérifiées. Voyons quel est le problème dont nous obtenons ainsi la solution.

Les équations (60), (62) et (63) sont toujours les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation (54) soit vérifiée par toute variation

$$\delta \mathrm{F}, \quad \delta \mathrm{G}, \quad \delta \mathrm{H}, \quad \delta \mathrm{L}, \quad \delta \mathrm{M}, \quad \delta \mathrm{N}, \quad \delta \Psi$$

qui satisfait aux conditions (45) et (46); et cette égalité (54) elle-même n'est qu'une forme plus explicite de l'égalité

$$(49) \qquad \delta(\mathfrak{Q} + \Omega) - \lambda \delta (\mathfrak{T} + \tau) = 0.$$

D'autre part, les équations (60), (62), (63), jointes aux conditions (36) et (38), entraînent, comme nous venons de le voir, l'égalité

$$(66) \qquad \mathfrak{Q} + \Omega - \lambda(\mathfrak{S} + \tau) = 0,$$

sans qu'il soit nécessaire de tenir compte de l'égalité (43).

Des égalités (49) et (66) résulte celle-ci :

$$(67) \qquad (\mathfrak{S} + \tau)\,\delta(\mathfrak{Q} + \Omega) - (\mathfrak{Q} + \Omega)\,\delta(\mathfrak{S} + \tau) = 0$$

qui peut encore s'écrire, puisque $(\mathfrak{S} + \tau)$ est une quantité essentiellement positive,

$$\delta\,\frac{\mathfrak{Q} - \Omega}{\mathfrak{S} + \tau} = 0.$$

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

F, G, H, L, M, N, $\Psi(x, y, z)$ *étant assujettis seulement aux conditions* (36) *et* (38), *on cherche à déterminer ces quantités de telle manière qu'en éprouvant des variations infiniment petites, elles imposent au rapport* $\frac{\Omega + \mathfrak{Q}}{\mathfrak{S} + \tau}$ *une variation infiniment petite d'ordre supérieur au premier. Il faut et il suffit pour cela que l'on puisse adjoindre aux quantités* F, G, H, L, M, N, $\Psi(x, y, z)$ *deux constantes* λ *et* K *telles que les équations* (60), (62) *et* (63) *soient vérifiées;* λ *est précisément la valeur que prend alors le rapport* $\frac{\mathfrak{Q} - \Omega}{\mathfrak{S} + \tau}$.

Comparons maintenant :

L'équation (60) à l'équation (35);
L'équation (62) à l'équation (37);
Les équations (63) aux équations (39).

Nous constatons que les équations de la première colonne se tirent des équations de la seconde colonne par substitution de $(\Psi + K)$ à Ψ et de λ à $\frac{4\pi^2}{T^2}$.

D'autre part, le mouvement pendulaire du fluide et du flotteur que l'on obtient en faisant

$$(68)\quad \left\{\begin{array}{ll} f(t) = \varepsilon F \sin 2\pi \frac{t}{T}, & l(t) = \varepsilon L \sin 2\pi \frac{t}{T}, \\ g(t) = \varepsilon G \sin 2\pi \frac{t}{T}, & m(t) = \varepsilon M \sin 2\pi \frac{t}{T}, \\ h(t) = \varepsilon H \sin 2\pi \frac{t}{T}, & n(t) = \varepsilon N \sin 2\pi \frac{t}{T}, \\ \multicolumn{2}{c}{\psi(x, y, z, t) = \varepsilon \Psi(x, y, z) \sin 2\pi \frac{t}{T},} \end{array}\right.$$

ne change pas si l'on y remplace $\Psi(x, y, z)$ par la somme

$$[\Psi(x, y, z) + K],$$

où K est une quantité indépendante de x, y, z, puisque les composantes de l'élongation en un point quelconque du fluide sont

$$(69)\quad \left\{\begin{array}{l} a(x, y, z, t) = -\frac{\partial \Psi(x, y, z)}{\partial x} \sin 2\pi \frac{t}{T}, \\ b(x, y, z, t) = -\frac{\partial \Psi(x, y, z)}{\partial y} \sin 2\pi \frac{t}{T}, \\ c(x, y, z, t) = -\frac{\partial \Psi(x, y, z)}{\partial z} \sin 2\pi \frac{t}{T}. \end{array}\right.$$

Nous pouvons donc énoncer les propositions suivantes :

1° *Toute solution de l'un ou de l'autre des deux problèmes de variations que nous avons considérés détermine un mouvement pendulaire possible du flotteur et du fluide : ce mouvement est représenté par les formules* (68) *et* (69), *et la période* T *en est donnée par la formule*

$$(70)\quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}.$$

2° *Tout mouvement pendulaire du solide et du fluide, représenté par les formules* (68) *et* (69), *fournit une solution du second problème de calcul de variations; en cette solution la valeur de la constante* λ *est donnée par la formule*

$$(70\ bis)\quad \lambda = \frac{4\pi^2}{T^2}.$$

3° *Un mouvement pendulaire du flotteur et du fluide, représenté par les formules* (68) *et* (69), *fait prendre à la somme* $(\mathfrak{S} + \mathfrak{T})$ *une certaine valeur positive* B^2. *Si l'on pose*

$$
(71)\qquad \left\{
\begin{array}{l}
F_1 = \dfrac{F}{B}, \qquad G_1 = \dfrac{G}{B}, \qquad H_1 = \dfrac{H}{B}, \\[2ex]
L_1 = \dfrac{L}{B}, \qquad M_1 = \dfrac{M}{B}, \qquad N_1 = \dfrac{N}{B}, \\[2ex]
\qquad \Psi_1(x, y, z) = \dfrac{\Psi(x, y, z)}{B},
\end{array}
\right.
$$

les quantités

$$F_1, \quad G_1, \quad H_1, \quad L_1, \quad M_1, \quad N_1, \quad \Psi_1(x, y, z),$$

jointes à la valeur de λ *que donne l'égalité* (70 *bis*), *fourniront une solution du premier problème de calcul des variations.*

VI. — Condition, fournie par la théorie des petits mouvements, qui suffit à assurer la stabilité du système.

Les géomètres qui ont fait usage de la considération des petits mouvements pour étudier les conditions de stabilité d'un flotteur ont admis l'exactitude de la proposition suivante :

Pour qu'un système soit en équilibre stable, il faut et il suffit que les équations des petits mouvements pendulaires de ce système ne puissent être vérifiées pour aucune valeur imaginaire de la période.

Appliqué au cas qui nous occupe, ce PRINCIPE, QUE NOUS NE DISCUTERONS PAS ICI, devient, en vertu des propositions démontrées au paragraphe précédent, le théorème suivant :

Pour la stabilité d'un système composé d'un fluide et d'un flotteur, il faut et il suffit que les deux problèmes de calcul des variations, équivalents entre eux, dont nous avons donné les énoncés, fournissent exclusivement, pour la constante λ, *des valeurs positives.*

Nous allons comparer ce critérium de stabilité à celui que fournit la méthode de Lagrange et de Lejeune-Dirichlet.

Considérons un déplacement virtuel quelconque du flotteur, déplacement caractérisé par des valeurs déterminées des six quantités F, G, H, L, M, N et par un facteur infiniment petit ε indépendant de x, y, z. Considérons, en même temps, un déplacement de la masse fluide *associé* à ce déplacement du solide; soient, en ce déplacement,

$$\delta x = \varepsilon \xi, \qquad \delta y = \varepsilon \eta, \qquad \delta z = \varepsilon \zeta, \tag{72}$$

où ξ, η, ζ sont trois fonctions finies et continues de x, y, z, les composantes du déplacement du point qui se trouvait initialement en (x, y, z); soit

$$\delta \rho = -\varepsilon \left[\frac{\partial(\rho_0 \xi)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_0 \eta)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_0 \zeta)}{\partial z} \right] \tag{73}$$

la variation de la densité au même point.

Pour qu'un tel déplacement soit un déplacement virtuel *compatible* avec le déplacement du solide, il faut :

1° Que le contact demeure assuré entre le fluide et la paroi invariable qui le contient, ce qui exige, en chaque point de cette paroi, l'égalité

$$\xi \cos(n, x) + \eta \cos(n, y) + \zeta \cos(n, z) = 0; \tag{74}$$

2° Que le contact demeure assuré entre le fluide et le flotteur, ce qui exige, en tout point de la surface s_{23} le long de laquelle le flotteur en équilibre est mouillé par le fluide, l'égalité

$$\begin{aligned}(F + z_0 M - y_0 N - \xi) \cos(N_0, x) + (G + x_0 N - z_0 L - \eta) \cos(N_0, y)& \\ + (H + y_0 L - x_0 M - \zeta) \cos(N, z) = 0.&\end{aligned} \tag{75}$$

Ce déplacement virtuel, compatible avec le mouvement du solide, sera *associé* à ce déplacement si l'on a :

1° En tout point (x, y, z) du volume 2 que le fluide occupe au moment de l'équilibre, l'égalité

$$\delta \rho = \varepsilon \frac{\Sigma}{\dfrac{d^2 \varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}}; \tag{76}$$

2° En tout point de la surface libre σ qui borne le fluide en équilibre, l'égalité

$$\xi \cos(n, x) + \eta \cos(n, y) + \zeta \cos(n, z) = \frac{\Sigma}{\frac{\partial V}{\partial n}}. \tag{77}$$

En ces deux égalités, Σ est une même quantité finie, indépendante de x, y, z.

Cette quantité Σ *est une forme linéaire et homogène des six quantités* F, G, H, L, M, N, *forme dont les coefficients sont déterminés lorsque l'état d'équilibre du système est connu.*

Nous avons, en effet, l'identité

$$\begin{aligned} \int_2 \left[\frac{\partial(\rho_0 \xi)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_0 \eta)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_0 \zeta)}{\partial z} \right] d\varpi_2 \\ + \int \rho_0 [\xi \cos(n, x) + \eta \cos(n, y) + \zeta \cos(n, z)] \, ds = 0, \end{aligned} \tag{78}$$

où la première intégrale s'étend au volume occupé par le fluide au moment de l'équilibre, et la seconde à toutes les surfaces qui enserrent ce volume. En vertu des égalités (73), (74), (75), (76) et (77), cette identité (78) devient

$$\begin{aligned} \left(\int_2 \frac{1}{\frac{d^2 \varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}} d\varpi_2 - \int_\sigma \frac{\rho_0}{\frac{\partial V}{\partial n}} d\sigma \right) \Sigma \\ = \quad F \int_{s_{23}} \rho_0 \cos(N_0, x) \, ds_{23} + G \int_{s_{23}} \rho_0 \cos(N_0, y) \, ds_{23} \\ + H \int_{s_{23}} \rho_0 \cos(N_0, z) \, ds_{23} \\ + L \int_{s_{23}} \rho_0 [y_0 \cos(N_0, z) - z_0 \cos(N_0, y)] \, ds_{23} \\ + M \int_{s_{23}} \rho_0 [z_0 \cos(N_0, x) - x_0 \cos(N_0, z)] \, ds_{23} \\ + N \int_{s_{23}} \rho_0 [x_0 \cos(N_0, y) - y_0 \cos(N_0, x)] \, ds_{23}. \end{aligned} \tag{79}$$

Admettons désormais, comme l'exige la stabilité du fluide[1], *que l'on ait :*

1° *L'inégalité*

$$\frac{d^2\varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2} > 0 \tag{80}$$

pour toutes les valeurs que prend ρ_0 *au sein du fluide en équilibre;*

2° *L'inégalité*

$$\frac{\partial V}{\partial n} < 0 \tag{81}$$

en tout point de la surface libre du fluide en équilibre.

Le coefficient de Σ en l'égalité (79) sera, alors, une quantité positive, et connue lorsque l'état d'équilibre du système est déterminé; la proposition énoncée sera ainsi démontrée.

Parmi les déplacements virtuels du fluide, ASSOCIÉS *à un déplacement donné du solide, il existe un et un seul déplacement dépendant d'un potentiel des élongations.*

Pour établir ce théorème, nous nous servirons d'un lemme, qui est une des propositions essentielles de la théorie de la chaleur, et dont nous avons fait usage au paragraphe précédent; ce lemme est le suivant :

Si $a(x, y, z)$ *est une fonction continue de* x, y, z, *donnée en tout point du volume* 2, *et* b *une quantité connue, variable d'une manière continue le long de la surface* s *qui limite ce volume; si, en outre, ces quantités sont liées entre elles par la condition*

$$\int_2 a\, d\varpi_2 + \int_s b\, ds = 0, \tag{82}$$

il existe une infinité de fonctions Ψ *qui satisfont à la condition*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right) = a \tag{83}$$

---

[1] P. DUHEM, *Sur la stabilité de l'équilibre d'un corps flottant à la surface d'un liquide compressible*, inégalités (4) et (5) (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. III, 1897, p. 392-393).

en tout point du volume 2, et à la condition

$$\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial n} = b \tag{84}$$

en tout point de la surface limite s.

Toutes ces fonctions se tirent de l'une d'elles par addition d'une constante arbitraire.

Cela posé, supposons qu'un déplacement du fluide, *associé* au déplacement du solide, dépende d'une fonction potentielle des élongations $\varepsilon\Psi$; nous aurons

$$\xi = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \qquad \eta = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \qquad \zeta = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}. \tag{85}$$

Les égalités (73) et (76) nous montrent que Ψ vérifiera, en tout point du volume 2, une équation de la forme (83), à condition de prendre

$$a = \frac{\Sigma}{\dfrac{d^2\varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}}. \tag{86}$$

Les égalités (85), (74), (75) et (77) nous montrent qu'en tout point de la surface qui limite le volume 2, Ψ vérifiera une équation de la forme (84), à condition de prendre

$$b = 0 \tag{87}$$

en tout point de la paroi immobile:

$$\begin{aligned} b = &-\rho_0(F + z_0 M - y_0 N)\cos(N_0, x) - \rho_0(G + x_0 N - z_0 L)\cos(N_3, y) \\ &- \rho_0(H + y_0 L - x_0 M)\cos(N_0, z) \end{aligned} \tag{88}$$

en tout point de la surface s_{23}; enfin

$$b = -\frac{\rho_0 \Sigma}{\dfrac{\partial V}{\partial n}} \tag{89}$$

en tout point de la surface σ.

L'égalité (79) nous montre, d'ailleurs, que ces valeurs de a et de b vérifient l'égalité (82); il existe donc, pour chaque ensemble de valeurs de

$$F, \quad G, \quad H, \quad L, \quad M, \quad N,$$

une infinité de fonctions Ψ qui satisfont aux conditions imposées; toutes ces fonctions se déduisent de l'une d'entre elles par addition d'une constante arbitraire, en sorte qu'elles correspondent toutes, en vertu des égalités (85), à un même système de valeurs de ξ, η, ζ, et qu'elles définissent toutes un même déplacement virtuel du fluide [1].

Ainsi, parmi les déplacements virtuels du système que représente le symbole (εW), il existe des déplacements où le mouvement du fluide est *associé* au mouvement du flotteur; nous désignerons ces derniers déplacements par le symbole (εA). A tout déplacement du flotteur correspond un et un seul déplacement (εA).

Considérons maintenant :

1° Un déplacement (εW) quelconque, défini par six valeurs arbitraires de F, G, H, L, M, N et par une fonction $\Psi(x, y, z)$;

2° Un déplacement du fluide, défini par trois fonctions ξ, η, ζ, et *associé* au déplacement précédent du solide.

Les identités

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial n} - \frac{\Sigma}{\frac{\partial V}{\partial n}} \right) + \frac{\Sigma}{\frac{\partial V}{\partial n}},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) &+ \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) - \frac{\Sigma}{\frac{d^2 \varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}} \right] + \frac{\Sigma}{\frac{d^2 \varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}},\end{aligned}$$

jointes à l'égalité (42), donnent l'expression suivante de Ω:

$$\Omega = \mathfrak{T} + \mathfrak{R} + \mathfrak{S}, \tag{90}$$

avec

$$\mathfrak{T} = \Sigma^2 \left(\int_{\varpi_2} \frac{1}{\frac{d^2 \varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}} d\varpi_2 - \int_{\sigma} \frac{\rho_0}{\frac{\partial V}{\partial n}} d\sigma \right), \tag{91}$$

---

[1] La méthode suivie en notre Mémoire *Sur la stabilité de l'équilibre d'un corps flottant à la surface d'un liquide compressible* admettait la possibilité de faire correspondre à tout déplacement du flotteur un déplacement *associé* du fluide; on voit que la démonstration de cette possibilité équivaut à l'établissement du principe fondamental de la théorie de la conductibilité thermique.

et

$$(92)\quad \mathfrak{A} = \int_2 \frac{d^2\varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)-\frac{\Sigma}{\dfrac{d^2\varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}}\right]^2 d\varpi_2$$
$$+\int_\sigma \rho_0\frac{\partial V}{\partial n}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial n}+\frac{\Sigma}{\dfrac{\partial V}{\partial n}}\right)^2 d\sigma,$$

$$(93)\quad \mathcal{S} = 2\Sigma\left\{\int_2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)-\frac{\Sigma}{\dfrac{d^2\varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}}\right]d\varpi_2\right.$$
$$\left.+\int_\sigma \rho_0\left(\frac{\partial\Psi}{\partial n}+\frac{\Sigma}{\dfrac{\partial V}{\partial n}}\right)d\sigma\right\}.$$

Les égalités (73) et (74) nous donnent

$$\frac{\partial(\rho_0\xi)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho_0\eta)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho_0\zeta)}{\partial z} = -\frac{\Sigma}{\dfrac{d^2\varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}}.$$

En vertu de cette égalité et de l'égalité (77), l'expression (93) de $\mathcal{S}$ peut s'écrire

$$\mathcal{S} = 2\Sigma\left\{\int_2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\rho_0\xi\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial y}+\rho_0\eta\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial z}+\rho_0\zeta\right)\right]d\varpi_2\right.$$
$$+\int_\sigma\rho_0\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\xi\right)\cos(n,x)+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}+\eta\right)\cos(n,y)\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}+\zeta\right)\cos(n,z)\right]d\sigma\right\}.$$

Observons maintenant :

1° Qu'en tout point de la paroi immobile, on a, en vertu des égalités (36) et (74),

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\xi\right)\cos(n,x)+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}+\eta\right)\cos(n,y)+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}+\zeta\right)\cos(n,z)=0;$$

2° Qu'en tout point de la surface mouillée s_{23} du flotteur, les égalités (38) et (75) donnent une égalité analogue.

Nous trouverons sans peine que l'on a toujours

$$\mathcal{S}=0,$$

ce qui réduit l'égalité (90) à

$$\Omega=\mathfrak{T}+\mathfrak{R}. \tag{94}$$

Nous savons que Σ est une forme linéaire et homogène des six quantités F, G, H, L, M, N. Dès lors, moyennant les inégalités (80) et (81) et l'égalité (91), $\mathfrak{T}$ *est une forme quadratique définie positive des six quantités* F, G, H, L, M, N *qui définissent un déplacement arbitraire du corps solide.*

En vertu des inégalités (80) et (81), la quantité $\mathfrak{R}$, définie par l'égalité (92), ne peut jamais être négative; pour qu'elle soit nulle, il faut et il suffit que l'on ait :

1° En tout point du volume 2, l'égalité

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)=\frac{\Sigma}{\dfrac{d^2\varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}};$$

2° En tout point de la surface σ, l'égalité

$$\frac{\partial\Psi}{\partial n}=-\frac{\Sigma}{\dfrac{\partial\mathrm{V}}{\partial n}}.$$

Ce sont précisément les conditions par lesquelles on exprime que le déplacement du fluide, où Ψ joue le rôle de fonction potentielle des élongations, est *associé* au déplacement du solide. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Nulle en tout déplacement (ε A), *la quantité* $\mathfrak{R}$ *est positive en tout déplacement* (ε W) *où le déplacement du fluide n'est pas* ASSOCIÉ *au déplacement du flotteur.*

L'étude de la stabilité de l'équilibre, suivie par la méthode de Lejeune-Dirichlet, nous a conduits à la proposition suivante (¹) :

Pour que le potentiel d'un système formé par un fluide et un flotteur solide soit minimum dans l'état d'équilibre, il est nécessaire et suffisant d'adjoindre aux inégalités (80) *et* (81) *la condition suivante :*

La somme $(\mathfrak{Q}+\mathfrak{T})$, *qui est une forme quadratique des six quantités* F, G, H, L, M, N, *est définie positive.*

Nous allons démontrer le théorème suivant :

Cette condition est, en même temps, nécessaire et suffisante pour que le rapport $\frac{\mathfrak{Q}+\Omega}{\tau+\mathfrak{J}}$ *ne puisse prendre que des valeurs positives.*

L'égalité (94) nous permet, en effet, d'écrire ce rapport sous la forme

$$\frac{\mathfrak{Q}+\mathfrak{T}+\mathfrak{R}}{\tau+\mathfrak{J}}.$$

Comme la quantité $\mathfrak{R}$ ne peut être négative en aucun déplacement (εW), on voit que, si la somme $(\mathfrak{Q}+\mathfrak{T})$ est une forme définie positive des quantités F, G, H, L, M, N, ce rapport ne prend assurément que des valeurs positives.

D'autre part, si un système de valeurs non toutes nulles des six quantités F, G, H, L, M, N pouvait faire prendre à la somme $(\mathfrak{Q}+\mathfrak{T})$ une valeur nulle ou négative, comme le déplacement (εA) qui correspond à ce système de valeurs annule $\mathfrak{R}$, il ferait prendre au rapport considéré une valeur nulle ou négative.

Selon l'égalité (66), toutes les valeurs que peut prendre la quantité λ se trouvent parmi les valeurs que peut prendre le rapport $\frac{\mathfrak{Q}+\Omega}{\tau+\mathfrak{J}}$. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Si la somme $(\mathfrak{Q}+\mathfrak{T})$, *qui est une forme quadratique des quan-*

(¹) P. Duhem, *Sur la stabilité de l'équilibre d'un corps flottant à la surface d'un liquide compressible* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5ᵉ série, t. III, 1897, p. 396).

tités F, G, H, L, M, N, *est définie positive, les petits mouvements pendulaires du système ont tous des périodes réelles et finies.*

La méthode de Lejeune-Dirichlet et la méthode, moins sûre, *des petits mouvements conduisent donc, l'une et l'autre, à cette même conclusion :*

Pour qu'un système formé d'un liquide compressible et d'un flotteur soit en équilibre stable, il suffit qu'en l'état d'équilibre, la forme $(\mathfrak{Q} + \mathfrak{T})$ *soit définie positive.*

Dans le cas où la forme $(\mathfrak{Q} + \mathfrak{T})$ est susceptible de prendre des valeurs nulles ou négatives, la méthode de Dirichlet ne nous permet pas de nier la stabilité de l'équilibre du système; la méthode des petits mouvements, *même si l'on en admet la légitimité*, n'autorise pas davantage un pareil jugement tant qu'on la présente sous la forme qui lui a été donnée ici; mais l'adjonction d'un nouveau postulat va nous fournir des conclusions plus complètes.

VII. — Comment la théorie des petits mouvements démontre que la condition précédente est nécessaire pour la stabilité de l'équilibre du système.

Considérons le rapport

$$\frac{\mathfrak{Q} + \Omega}{\tau + \mathfrak{T}}.$$

Il est la somme des deux rapports $\frac{\Omega}{\tau + \mathfrak{T}}$ et $\frac{\mathfrak{Q}}{\tau + \mathfrak{T}}$.

Si nous nous reportons à l'expression (8) de $\mathfrak{T}$, à l'expression (40) de τ, nous voyons que la somme $(\tau + \mathfrak{T})$ est essentiellement positive ou nulle; l'expression (42) de Ω, jointe aux inégalités (80) et (81), nous montre que la quantité Ω ne peut, non plus, jamais être négative; le rapport $\frac{\Omega}{\tau + \mathfrak{T}}$ ne peut donc jamais être négatif, en sorte qu'il admet une limite inférieure positive ou nulle.

Le rapport $\frac{\mathfrak{Q}}{\tau + \mathfrak{T}}$ ne peut, en valeur absolue, surpasser le rapport $\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{T}}$; mais $\mathfrak{Q}$ est une forme quadratique des six variables F, G, H, L, M, N, et $\mathfrak{T}$ est une forme quadratique définie positive des mêmes variables; la valeur absolue du rapport $\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{T}}$ admet donc une limite supérieure; il en est de même de la valeur absolue de $\frac{\mathfrak{D}}{\tau + \mathfrak{T}}$, en sorte que ce dernier rapport admet assurément une limite supérieure et une limite inférieure.

Le rapport $\frac{\mathfrak{D} + \Omega}{\mathfrak{T} + \tau}$, somme de deux quantités dont chacune admet une limite inférieure, admet lui-même une limite inférieure.

Ce point acquis, voici le POSTULAT que nous formulerons et admettrons :

Le rapport $\frac{\mathfrak{D} + \Omega}{\mathfrak{T} + \tau}$, *qui est limité inférieurement, atteint sa limite inférieure pour des déterminations convenablement choisies des six quantités* F, G, H, L, M, N *et de la fonction* $\Psi(x, y, z)$.

La limite inférieure de $\frac{\mathfrak{D} + \Omega}{\mathfrak{T} + \tau}$ est, alors, pour ce rapport, un minimum. Selon la théorie des minima, lorsque l'on donne à F, G, H, L, M, N, Ψ des déterminations qui correspondent à ce minimum, l'égalité

$$(\mathfrak{T} + \tau)(\delta\mathfrak{D} + \delta\Omega) - (\mathfrak{D} + \Omega)(\delta\mathfrak{T} + \delta\tau) = 0 \tag{67}$$

est vérifiée quels que soient δF, δG, δH, δL, δM, δN, $\delta\Psi$. Cette valeur minima de $\frac{\mathfrak{D} + \Omega}{\mathfrak{T} + \tau}$ est donc une des valeurs que peut prendre la quantité λ. D'ailleurs, selon l'égalité

$$\lambda = \frac{\mathfrak{D} + \Omega}{\mathfrak{T} + \tau}, \tag{66}$$

elle est la plus petite de ces valeurs. D'où le théorème suivant :

La plus petite des quantités λ *est égale à la limite inférieure des valeurs du rapport* $\frac{\mathfrak{D} + \Omega}{\mathfrak{T} + \tau}$.

Or, à la fin du paragraphe précédent, nous avons établi ces propositions :

1° Si la forme $(\mathfrak{D} + \mathfrak{T})$, quadratique en F, G, H, L, M, N, est une forme définie positive de ces six variables, le rapport $\frac{\mathfrak{D} + \Omega}{\mathfrak{T} + \tau}$ est toujours positif;

2° Si la forme $(\mathfrak{Q} + \mathfrak{C})$, incapable de devenir négative, peut s'annuler sans que les six variables F, G, H, L, M, N soient toutes égales à zéro, le rapport $\frac{\mathfrak{Q}+\Omega}{\mathfrak{T}+\tau}$ ne peut être négatif, mais il peut s'annuler;

3° Si la forme $(\mathfrak{Q} + \mathfrak{C})$ peut prendre des valeurs négatives, il en est de même du rapport $\frac{\mathfrak{Q}+\Omega}{\mathfrak{T}+\tau}$.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Si la somme $(\mathfrak{Q} + \mathfrak{C})$ *n'est pas une forme définie positive des six variables* F, G, H, L, M, N, *la plus petite valeur de* λ *est nulle ou négative; les équations des petits mouvements pendulaires du système peuvent être vérifiées par une valeur infinie ou imaginaire de la période, et l'équilibre du système ne peut pas être stable.*

Cette dernière partie de la conclusion suppose, bien entendu, que l'on admette la légitimité du critère de stabilité déduit de la théorie des petits mouvements.

VIII. — Détermination approchée par défaut de la plus longue période que puisse affecter un mouvement pendulaire du système.

Imaginons désormais que la forme quadratique $(\mathfrak{Q} + \mathfrak{C})$ soit définie positive; le système est en équilibre stable et tous les petits mouvements pendulaires ont des périodes finies et réelles; chacune de ces périodes est d'ailleurs une simple valeur absolue, non affectée de signe.

Si T_1 est la plus longue de ces périodes, le rapport $\frac{4\pi^2}{T_1^2}$, qui est la plus petite valeur λ_1 que puisse prendre la quantité λ, est égal à la plus petite valeur qu'un mouvement (εW) puisse faire prendre au rapport $\frac{\mathfrak{Q}+\Omega}{\mathfrak{T}+\tau}$. Le mouvement (εW), qui fait prendre à ce rapport la valeur minimum λ_1, est formé par l'ensemble des quantités F_1, G_1, H_1, L_1, M_1, N_1, $\Psi_1(x, y, z)$ qui, multipliées par $\varepsilon \sin 2\pi \frac{t}{T_1}$, représentent les éléments d'un petit mouvement pendulaire de période T_1.

Ce mouvement (ε W) qui rend minimum le rapport $\frac{\mathfrak{D}+\Omega}{\mathfrak{T}+\tau}$ est-il un mouvement (ε A)?

S'il en est ainsi, le mouvement pendulaire de période T_1 du système entier se compose d'un certain mouvement pendulaire infiniment petit du solide et d'un mouvement pendulaire infiniment petit, *associé* au précédent, de la masse fluide. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit, d'après ce qui a été démontré au paragraphe 3, que la surface immergée du solide soit de révolution autour d'un axe et que son mouvement se réduise à une oscillation autour de cet axe; dans ce cas, d'ailleurs, le fluide est immobile.

Dans le cas donc où la surface immergée du flotteur est de révolution autour d'un axe et où le mouvement pendulaire de plus longue période T_1 *se réduit à une oscillation autour de cet axe, le rapport* $\frac{4\pi^2}{T_1^2}$ *est égal à la plus petite des valeurs que les mouvements* (ε A) *fassent prendre au rapport* $\frac{\mathfrak{D}+\Omega}{\mathfrak{T}+\tau}$.

Hors ce cas, le mouvement (ε W) qui détermine le minimum λ_1 du rapport $\frac{\mathfrak{D}+\Omega}{\mathfrak{T}+\tau}$ n'est assurément pas un mouvement (ε A); la limite inférieure des valeurs que les divers mouvements (ε A) peuvent faire prendre à ce rapport est assurément supérieure à λ_1. Ainsi, *lorsque les conditions précédentes ne sont pas vérifiées, la limite inférieure des valeurs qu'un mouvement* (ε A) *puisse faire prendre au rapport* $\frac{\mathfrak{D}+\Omega}{\mathfrak{T}+\tau}$ *est assurément supérieure à la quantité* λ_1.

Si l'on désigne par $\left(\frac{\mathfrak{D}+\Omega}{\mathfrak{T}+\tau}\right)_A$ *la limite inférieure des valeurs qu'un mouvement* (ε A) *puisse faire prendre au rapport* $\frac{\mathfrak{D}+\Omega}{\mathfrak{T}+\tau}$ *et par* T_0 *la valeur absolue qui détermine l'égalité*

$$\frac{4\pi^2}{T_0^2} = \left(\frac{\mathfrak{D}+\Omega}{\mathfrak{T}+\tau}\right)_A, \tag{95}$$

la quantité T_0 *sera au plus égale et, en général, elle sera inférieure à la plus longue période* T_1 *des mouvements pendulaires dont le système est susceptible.*

L'égalité $T_1 = T_0$ est réservée au cas où la surface mouillée du flotteur est de révolution autour d'un axe et où le mouvement pendulaire de période T_1 se réduit à une oscillation autour de cet axe.

Nous allons voir maintenant que, parmi les mouvements (εA), il en est toujours au moins un qui fasse prendre à la valeur du rapport $\frac{\mathfrak{Q}+\Omega}{\mathfrak{S}+\tau}$ sa limite inférieure $\left(\frac{\mathfrak{Q}+\Omega}{\mathfrak{S}+\tau}\right)_A$, et nous allons montrer comment il serait possible de déterminer effectivement la valeur de cette limite inférieure.

Dans ce but, nous allons montrer ce que devient le rapport $\frac{\mathfrak{Q}+\Omega}{\mathfrak{S}+\tau}$ lorsque, parmi tous les déplacements (εW), on considère seulement les déplacements (εA).

Nous savons déjà que le numérateur $(\mathfrak{Q}+\Omega)$ se réduit à la somme $(\mathfrak{Q}+\bar{\omega})$ qui est une forme quadratique définie positive de F, G, H, L, M, N. Le dénominateur seul doit donc nous occuper.

La quantité Σ est une forme linéaire et homogène des six variables F, G, H, L, M, N :

$$\Sigma = \Sigma_1 F + \Sigma_2 G + \Sigma_3 H + \Sigma_4 L + \Sigma_5 M + \Sigma_6 N. \tag{96}$$

Les coefficients de cette forme sont définis par l'égalité (79), en sorte que l'on a

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\int_{\varpi_2} \frac{1}{\frac{d^2\varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}}\,d\varpi_2 - \int_\sigma \frac{\rho_0}{\frac{\partial V}{\partial n}}\,d\sigma\right)\Sigma_1 \\ &\qquad = \int_{s_{23}} \rho_0 \cos(N_0, x)\,ds_{23}, \qquad \ldots, \\ &\left(\int_{\varpi_2} \frac{1}{\frac{d^2\varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}}\,d\varpi_2 - \int_\sigma \frac{\rho_0}{\frac{\partial V}{\partial n}}\,d\sigma\right)\Sigma_4 \\ &\qquad = \int_{s_{23}} \rho_0[y_0\cos(N_0, z) - z_0\cos(N_0, y)]\,ds_{23}, \qquad \ldots. \end{aligned}\right. \tag{97}$$

Considérons la fonction Ψ déterminée, à une constante près, par les conditions (83) à (89); il est facile de voir qu'elle se peut mettre sous la forme

$$\Psi = \Phi_1 F + \Phi_2 G + \Phi_3 H + \Phi_4 L + \Phi_5 M + \Phi_6 N + \chi, \tag{98}$$

$\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5, \Phi_6$ étant six fonctions de x, y, z, indépendantes de F, G, H, L, M, N, et χ une simple constante arbitraire.

Déterminons, en effet, la fonction $\Phi_1(x, y, z)$ par les conditions suivantes :

En tout point du volume $\mathfrak{2}$ rempli par le fluide en équilibre, elle vérifie la condition

$$\frac{d^2\varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\right)\right]=\Sigma_1; \tag{99}$$

En tout point de la paroi immobile, elle vérifie la condition

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial n}=0; \tag{100}$$

En tout point de la surface libre σ qui borne le fluide en équilibre, elle vérifie la condition

$$\frac{\partial V}{\partial n}\frac{\partial\Phi_1}{\partial n}=-\Sigma_1; \tag{101}$$

En tout point de la surface s_{23}, elle vérifie la condition

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial N_0}=-\cos(N_0, x). \tag{102}$$

En vertu de la première des égalités (97), il existe une infinité de fonctions $\Phi_1(x, y, z)$ qui vérifient ces conditions (99) à (102), et ces diverses fonctions se tirent toutes de l'une d'entre elles par addition d'une constante arbitraire.

Déterminons d'une manière analogue les fonctions $\Phi_2(x, y, z)$, $\Phi_3(x, y, z)$.

Assujettissons la fonction $\Phi_4(x, y, z)$ à vérifier les conditions suivantes :

En tout point du volume $\mathfrak{2}$ rempli par le fluide en équilibre, on a

$$\frac{d^2\varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial\Phi_4}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial\Phi_4}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial\Phi_4}{\partial z}\right)\right]=\Sigma_4; \tag{103}$$

En tout point de la paroi immobile, on a

$$\frac{\partial\Phi_4}{\partial n}=0; \tag{104}$$

En tout point de la surface libre σ, on a

$$\frac{\partial V}{\partial n}\frac{\partial \Phi_4}{\partial n} = -\Sigma_4; \tag{105}$$

Enfin, en tout point de la surface mouillée s_{23} du flotteur en équilibre, on a

$$\frac{\partial \Phi_4}{\partial N_0} = -[y_0 \cos(N_0, z) - z_0 \cos(N_0, y)]. \tag{106}$$

En vertu de la quatrième égalité (97), la fonction $\Phi_4(x, y, z)$ est déterminée, à une constante additive près, par les conditions (103) à (106).

Assujettissons les fonctions $\Phi_5(x, y, z)$, $\Phi_6(x, y, z)$ à des conditions analogues.

Il est désormais évident que l'expression (98), formée de la sorte, est l'expression la plus générale d'une fonction $\Psi(x, y, z)$ capable de vérifier les conditions (83) à (89).

Cette expression est donc la somme :

1° D'une fonction linéaire et homogène de F, G, H, L, M, N, forme dont les coefficients sont des fonctions de x, y, z, bien déterminées lorsque l'état d'équilibre du système est connu;

2° D'une fonction linéaire et non homogène de F, G, H, L, M, N, fonction dont les coefficients sont des constantes arbitraires.

Chacune des trois quantités $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Psi}{\partial y}$, $\frac{\partial \Psi}{\partial z}$ est alors une forme linéaire et homogène bien déterminée des six quantités F, G, H, L, M, N.

Nous obtenons ainsi la conclusion suivante :

Si l'on se borne à considérer les déplacements ($\varepsilon\Delta$) où le déplacement du fluide est ASSOCIÉ *au déplacement du solide, la quantité*

$$\tau = \int_2 \rho_0 \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2 \right] d\varpi_2 \tag{40}$$

se réduit à une forme quadratique Θ *des quantités* F, G, H, L, M, N; *les coefficients de cette forme* Θ *sont déterminés lorsque l'état d'équilibre du système est connu; cette forme* Θ *est définie positive, hors le cas où la surface immergée du flotteur est de révolution autour d'un certain axe et où les quantités* F, G, H, L, M, N *cor-*

respondent à une rotation autour de ces axes; dans ce cas, la forme Θ *est nulle.*

Cette proposition, jointe à l'égalité (95), nous donne alors cette autre conclusion :

La quantité $\frac{4\pi^2}{T_0^2}$ *est la valeur minimum du rapport*

$$\frac{\mathfrak{Q} + \mathfrak{T}}{\mathfrak{J} + \Theta}, \tag{107}$$

qui est le rapport de deux formes quadratiques définies positives des six quantités F, G, H, L, M, N.

On sait comment s'obtient ce minimum. On peut trouver six fonctions linéaires et homogènes X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 des six quantités F, G, H, L, M, N telles que

$$\mathfrak{J} + \Theta = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 + X_6^2, \tag{108}$$

$$\mathfrak{Q} + \mathfrak{T} = S_1 X_1^2 + S_2 X_2^2 + S_3 X_3^2 + S_4 X_4^2 + S_5 X_5^2 + S_6 X_6^2. \tag{109}$$

Les six coefficients S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, qui sont tous réels et positifs, sont les six racines d'une certaine équation du sixième degré

$$\Delta(S) = 0, \tag{110}$$

dont les coefficients se forment à l'aide des coefficients des deux formes $(\mathfrak{Q} + \mathfrak{T})$ et $(\mathfrak{J} + \Theta)$, et dont les propriétés sont bien connues.

Si S_1 est la plus petite racine de l'équation (100), elle représente la valeur minimum du rapport (107) et l'on a

$$\frac{4\pi^2}{T_0^2} = S_1 \tag{111}$$

ou bien encore

$$T_1 \geqq 2\pi\sqrt{\frac{1}{S_1}}. \tag{112}$$

Le signe d'égalité est réservé au cas où la surface mouillée du flotteur est de révolution autour d'un certain axe et où la plus lente oscillation du flotteur se réduit à une oscillation autour de cet axe.

L'étude du rapport (107) se relie à un problème fictif de Mécanique dont nous allons former l'énoncé.

Hors le cas où la surface du flotteur, mouillée en l'état d'équilibre, est de révolution autour d'un axe, et où le petit mouvement du flotteur se réduit à une oscillation autour de cet axe, le petit mouvement réel du fluide ne peut pas être *associé* au petit mouvement du solide; nous l'avons démontré au paragraphe 3. Mais nous pouvons, par la pensée, imposer au fluide un mouvement fictif tel qu'à chaque instant t, le déplacement éprouvé par le fluide soit *associé* au déplacement $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$, $l(t)$, $m(t)$, $n(t)$ du solide au même instant; nous dirons alors que le fluide est animé d'un *mouvement fictif associé* au mouvement du flotteur.

Si nous voulons calculer la force vive qu'aurait le fluide, à l'instant t, en un tel *mouvement fictif associé* au mouvement du flotteur, il nous suffit évidemment de prendre la forme quadratique $\frac{1}{2}\Theta$ et d'y remplacer respectivement les quantités

$$\mathrm{F},\quad \mathrm{G},\quad \mathrm{H},\quad \mathrm{L},\quad \mathrm{M},\quad \mathrm{N}$$

par les quantités

$$\frac{df(t)}{dt},\quad \frac{dg(t)}{dt},\quad \frac{dh(t)}{dt},\quad \frac{dl(t)}{dt},\quad \frac{dm(t)}{dt},\quad \frac{dn(t)}{dt}.$$

Nous nommerons $\mathfrak{T}'(t)$ cette force vive qu'aurait le fluide à l'instant t s'il était animé d'un *mouvement fictif associé* au mouvement du flotteur.

En la quantité $\mathfrak{T}$, substituons aux quantités

$$\mathrm{F},\quad \mathrm{G},\quad \mathrm{H},\quad \mathrm{L},\quad \mathrm{M},\quad \mathrm{N}$$

les quantités

$$f(t),\quad g(t),\quad h(t),\quad l(t),\quad m(t),\quad n(t).$$

Selon les égalités (92) et (94), nous obtenons visiblement la valeur que Ω prendrait à l'instant t, si le fluide était animé du *mouvement fictif associé* au mouvement du flotteur. Nous désignerons par $\Omega'(t)$ cette quantité, qui est une forme quadratique de $f(t)$, ..., $n(t)$.

$\frac{1}{2}\Omega'(t)$ peut être regardé comme le potentiel de certaines actions. Cherchons à définir ces actions.

Dans ce but, désignons par $\Sigma'(t)$ ce que devient la quantité Σ lorsqu'on y substitue les quantités

$$f(t),\quad g(t),\quad h(t),\quad l(t),\quad m(t),\quad n(t)$$

aux quantités

$$\mathrm{F},\quad \mathrm{G},\quad \mathrm{H},\quad \mathrm{L},\quad \mathrm{M},\quad \mathrm{N}.$$

Si les quantités

$$f(t),\quad g(t),\quad h(t),\quad l(t),\quad m(t),\quad n(t)$$

éprouvent respectivement des accroissements infiniment petits arbitraires

$$\delta f,\quad \delta g,\quad \delta h,\quad \delta l,\quad \delta m,\quad \delta n,$$

$\Sigma'(t)$ éprouve un accroissement $\delta\Sigma'$ dont la valeur, selon l'égalité (79), est donnée par l'égalité

$$\left(\int_2 \frac{1}{\frac{d^2\varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}}\,d\varpi_2 - \int_\sigma \frac{\rho_0}{\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n}}\,d\sigma\right)\delta\Sigma' = \delta f \int_{s_{23}} \rho_0 \cos(\mathrm{N}_0, x)\, ds_{23} + \ldots,$$

tandis que l'égalité (91) donne

$$\delta\Omega' = 2\left(\int_2 \frac{1}{\frac{d^2\varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}} - \int_\sigma \frac{\rho_0}{\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n}}\,d\sigma\right)\Sigma'\,\delta\Sigma'.$$

Nous pouvons donc écrire

$$\delta\Omega' = \delta f \int_{s_{23}} 2\rho_0 \Sigma'(t)\cos(\mathrm{N}_0, x)\, ds_{23} + \ldots.$$

En chaque point de la surface s_{23} du flotteur qui mouille le fluide en équilibre, imaginons une pression normale à cette surface, dirigée vers l'intérieur du solide, et qui ait pour valeur

$$\Pi(t) = \rho_0 \Sigma'(t).$$

A cette pression, qui est une fonction linéaire et homogène de

$$f(t),\quad g(t),\quad h(t),\quad l(t),\quad m(t),\quad n(t),$$

donnons le nom de *pression fictive associée* au mouvement du flotteur.

En tout déplacement virtuel du flotteur, nous aurons

$$\frac{1}{2}\delta\Omega' = \delta f \int_{s_{23}} \Pi(t)\cos(N_0, x)\, ds_{23} + \ldots,$$

$\frac{1}{2}\delta\Omega'$ sera égal et de signe contraire au travail de la pression $\Pi(t)$; $\frac{1}{2}\Omega'(t)$ *peut* donc *être regardé comme le potentiel de la pression fictive* $\Pi(t)$ *associée au mouvement du flotteur.*

Ces remarques faites, imaginons que l'on veuille traiter le problème suivant :

On se propose d'étudier le mouvement d'un solide identique à celui qui constitue le flotteur, en supposant que ce solide soit soumis :

1° *Aux actions extérieures qui le sollicitent réellement;*

2° *Aux pressions du fluide qui l'environne; dans le calcul de ces pressions, on néglige les termes qui proviennent des forces d'inertie appliquées aux diverses masses élémentaires qui constituent le fluide;*

3° *Aux pressions fictives associées au mouvement du flotteur.*

La force vive du solide est supposée égale à la somme de sa force vive réelle et de la force vive du fluide dans un tel mouvement associé fictif.

En traitant le problème des oscillations pendulaires d'un tel corps comme nous avons traité le problème des oscillations véritables d'un flotteur, nous arriverons aux conclusions suivantes :

Les valeurs F, G, H, L, M, N qui conviennent à une telle oscillation pendulaire vérifient l'équation

$$\delta \frac{\mathfrak{Q} + \mathfrak{T}}{\mathfrak{J} + \Theta} = 0;$$

elles font prendre au rapport

$$\frac{\mathfrak{Q} + \mathfrak{T}}{\mathfrak{J} + \Theta}$$

une valeur égale à $\frac{4\pi^2}{T^2}$, T étant la période du mouvement pendulaire considéré.

Les égalités (108) et (109) nous montrent sans peine que le système fictif dont nous venons de parler est susceptible de six mouvements pendulaires simples ; si S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6 sont les six racines, rangées par ordre de grandeur croissante, de l'équation (110), les quantités

$$\frac{2\pi}{\sqrt{S_1}}, \quad \frac{2\pi}{\sqrt{S_2}}, \quad \frac{2\pi}{\sqrt{S_3}}, \quad \frac{2\pi}{\sqrt{S_4}}, \quad \frac{2\pi}{\sqrt{S_5}}, \quad \frac{2\pi}{\sqrt{S_6}}$$

sont les périodes, rangées par ordre de grandeur décroissante, de ces six mouvements.

Le théorème exprimé par la condition (112) peut s'énoncer ainsi :

La période la plus longue que puisse présenter un mouvement pendulaire d'un flotteur est au moins égale, et elle est en général supérieure à la période du mouvement pendulaire le plus lent que puisse prendre le système fictif qui vient d'être défini.

Considérons, de nouveau, le rapport

$$\frac{\mathfrak{Q}+\mathfrak{T}}{\mathfrak{S}+\Theta}.$$

La quantité Θ est nulle si le déplacement du fluide *associé* au déplacement F, G, H, L, M, N du solide se réduit à l'immobilité ; hors ce cas, elle est positive. Pour un ensemble donné de valeurs de F, G, H, L, M, N, le rapport $\frac{\mathfrak{Q}+\mathfrak{T}}{\mathfrak{S}+\Theta}$ est plus petit que le rapport $\frac{\mathfrak{Q}+\mathfrak{T}}{\mathfrak{S}}$, à moins que la surface mouillée du flotteur ne soit de révolution autour d'un axe et que les valeurs considérées de F, G, H, L, M, N ne définissent une simple rotation autour de cet axe.

La plus petite valeur du rapport $\frac{\mathfrak{Q}+\mathfrak{T}}{\mathfrak{S}+\Theta}$ ne peut pas être inférieure à la plus petite valeur du rapport $\frac{\mathfrak{Q}+\mathfrak{T}}{\mathfrak{S}}$; pour que ces deux valeurs puissent être égales entre elles, il faut, mais il ne suffit pas, que la surface mouillée du flotteur soit de révolution autour d'un certain axe et que le système de valeurs de F, G, H, L, M, N qui rend $\frac{\mathfrak{Q}+\mathfrak{T}}{\mathfrak{S}+\Theta}$ minimum détermine une simple rotation autour de cet axe; il faut et il suffit que le système de valeurs de F, G, H, L, M, N qui rend $\frac{\mathfrak{Q}+\mathfrak{T}}{\mathfrak{S}}$ minimum détermine une simple rotation autour de cet axe.

Nous obtenons ainsi le théorème suivant :

La plus longue période T_1 *des mouvements pendulaires que le flotteur peut prendre est au moins égale à la quantité* T'_0, *si l'on désigne par* $\frac{4\pi^2}{T'^2_0}$ *la plus petite valeur que puisse prendre le rapport* $\frac{\mathfrak{Q}+\mathfrak{E}}{\mathfrak{S}}$. *Pour que* T_1 *soit égal à* T'_0, *il faut et il suffit que la surface mouillée du flotteur soit de révolution autour d'un certain axe et que le système de valeurs de* F, G, H, L, M, N *qui rend* $\frac{\mathfrak{Q}+\mathfrak{E}}{\mathfrak{S}}$ *minimum corresponde à une simple oscillation autour de cet axe.*

Mais il pourrait se faire que le mouvement pendulaire le plus long du flotteur fût une oscillation autour de cet axe sans que, cependant, T_1 fût égal à T'_0.

La considération du rapport $\frac{\mathfrak{Q}+\mathfrak{E}}{\mathfrak{S}}$ se relie à l'étude d'un nouveau problème fictif qui peut s'énoncer ainsi :

Déterminer les oscillations pendulaires du solide en calculant comme au problème fictif précédent les pressions qu'il éprouve de la part du fluide, mais en laissant à ce solide sa force vive réelle.

On montre, en effet, que tout système de valeurs de F, G, H, L, M, N qui fournit une solution de ce problème fictif vérifie l'équation

$$\delta \frac{\mathfrak{Q}+\mathfrak{E}}{\mathfrak{S}} = 0.$$

Au rapport $\frac{\mathfrak{Q}+\mathfrak{E}}{\mathfrak{S}}$, il fait prendre une certaine valeur positive $\frac{4\pi^2}{T'^2}$; T' est la période du mouvement pendulaire que définit cette solution.

Le solide dont nous venons de parler est susceptible de six mouvements pendulaires distincts dont les périodes se déterminent comme se déterminent celles du précédent système fictif.

La plus longue période T_1 *des mouvements pendulaires que le système peut prendre est au moins égale à la période* T_0 *du mouvement pendulaire le plus lent du solide fictif qui vient d'être défini ; elle lui est, en général, supérieure.*

A ces propositions, nous pouvons adjoindre celle-ci :

Lorsqu'à la période T_1 *du mouvement pendulaire le plus lent que le flotteur puisse éprouver, on substitue la plus longue période* T'_0 *des mouvements pendulaires dont le second système fictif est susceptible, on atteint une approximation au plus égale à celle que l'on obtiendrait en substituant à* T_1 *la période* T_0 *du mouvement pendulaire le plus lent que puisse prendre le second système fictif; pour que ces deux approximations soient égales, il faut et il suffit, d'ailleurs, que la première se transforme en exactitude; hors ce cas, la première évaluation est moins approchée que la seconde.*

IX. — Formation successive des divers mouvements pendulaires dont le flotteur est susceptible.

La méthode indiquée aux paragraphes V et VII ramène à un problème de minimum les déterminations de la plus petite des quantités λ, partant de la plus longue période dont soit susceptible un mouvement pendulaire du système, et des quantités F, G, H, L, M, N, $\Psi(x, y, z)$ qui caractérisent ce mouvement pendulaire.

On imagine aisément une généralisation de cette règle, généralisation qui permette de former les diverses quantités λ, successivement et dans l'ordre de la grandeur croissante, et d'associer à chacune d'elles des quantités F, G, H, L, M, N, $\Psi(x, y, z)$ qui peuvent fournir un mouvement pendulaire de période $\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}$.

Voici, par exemple, comment se formerait le $n^{\text{ième}}$ mouvement pendulaire :

Considérons les quantités F, G, H, L, M, N, $\Psi(x, y, z)$ *qui sont assujetties aux conditions de liaisons* (36) *et* (38), *et, de plus, aux conditions suivantes :*

1° *On a*

$$\mathfrak{S} + \tau = 1. \tag{43}$$

2° *On a les $(n-1)$ égalités*

$$
(113)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial F_1}F + \frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial F_1}G + \frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial H_1}H + \frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial L_1}L + \frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial M_1}M + \frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial N_1}N \\
&\qquad + 2\int_2 \rho_0 \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial z}\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) d\varpi_2 = 0, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\frac{\partial \mathfrak{T}_{n-1}}{\partial F_{n-1}}F + \frac{\partial \mathfrak{T}_{n-1}}{\partial G_{n-1}}G + \frac{\partial \mathfrak{T}_{n-1}}{\partial H_{n-1}}H + \frac{\partial \mathfrak{T}_{n-1}}{\partial L_{n-1}}L + \frac{\partial \mathfrak{T}_{n-1}}{\partial M_{n-1}}M + \frac{\partial \mathfrak{T}_{n-1}}{\partial N_{n-1}}N \\
&\qquad + 2\int_2 \rho_0 \left(\frac{\partial \Psi_{n-1}}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_{n-1}}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_{n-1}}{\partial z}\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) d\varpi_2 = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

En ces égalités, $\mathfrak{T}_p$ représente ce que devient $\mathfrak{T}$ lorsqu'on y remplace F, G, H, L, M, N *par* F_p, G_p, H_p, L_p, M_p, N_p. *Par une substitution semblable, $\mathfrak{Q}$ deviendrait $\mathfrak{Q}_p$.*

Parmi les ensembles F, G, H, L, M, N, $\Psi(x, y, z)$ *qui vérifient ces diverses conditions, il en est un qui rend minimum la somme*

$$\mathfrak{Q} + \Omega.$$

Cet ensemble F_n, G_n, H_n, L_n, M_n, N_n, $\Psi_n(x, y, z)$ *correspond au $n^{\text{ième}}$ mouvement pendulaire. La période T_n de celui-ci est donnée par l'égalité*

$$(114)\qquad \frac{4\pi^2}{T_n^2} = \lambda_n = \mathfrak{Q}_n + \Omega_n,$$

où

$$
(42\,bis)\quad \Omega_n = -\int_\sigma \rho_0 \frac{\partial V}{\partial n}\left(\frac{\partial \Psi_n}{\partial n}\right)^2 d\sigma
+ \int_2 \frac{d^2\varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi_n}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi_n}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi_n}{\partial z}\right)\right]^2 d\varpi_2.
$$

La règle que nous venons de formuler a été justifiée dans le cas où $n = 1$; pour en démontrer la généralité, il suffit de la supposer exacte jusqu'à une certaine valeur $(n-1)$ du rang n, et de prouver qu'elle l'est encore pour la valeur suivante de ce rang. C'est ce que nous allons faire.

Considérons l'ensemble des déterminations de F, G, H, L, M, N, $\Psi(x, y, z)$ qui vérifient les conditions (36), (38), (43), (113) et l'ensemble des valeurs de la somme $(\mathfrak{Q}+\Omega)$ qui lui correspond; cette somme étant toujours positive, l'ensemble des valeurs de $(\mathfrak{Q}+\Omega)$ admet une limite inférieure; *nous* SUPPOSERONS *qu'en l'ensemble considéré des déterminations de*

$$\text{(115)} \qquad F, \quad G, \quad H, \quad L, \quad M, \quad N, \quad \Psi(x, y, z),$$

il en est une

$$\text{(116)} \qquad F_n, \quad G_n, \quad H_n, \quad L_n, \quad M_n, \quad N_n, \quad \Psi_n(x, y, z),$$

qui fait atteindre à $(\mathfrak{Q}+\Omega)$ *sa limite inférieure,* qui est alors un minimum $(\mathfrak{Q}_n+\Omega_n)$ de cette quantité. La légitimité de notre démonstration est subordonnée à la légitimité de cette hypothèse.

L'ensemble (116) ne peut être identique à aucun des ensembles analogues précédemment rencontrés. Supposons, en effet, qu'il soit identique à l'ensemble

$$\text{(117)} \qquad F_p, \quad G_p, \quad H_p, \quad L_p, \quad M_p, \quad N_p, \quad \Psi_p(x, y, z),$$

où p est inférieur à n [cette identité laissant, d'ailleurs, aux deux fonctions $\Psi_p(x, y, z)$, $\Psi_n(x, y, z)$ la faculté de différer par une quantité quelconque indépendante de x, y, z].

L'ensemble (116), substitué à l'ensemble (115) en la $p^{\text{ième}}$ égalité (113), doit transformer celle-ci en identité; si les deux ensembles (116) et (117) étaient identiques, la $p^{\text{ième}}$ égalité (113) deviendrait une identité lorsqu'on y substituerait l'ensemble (117) à l'ensemble (115); or, cette dernière substitution transforme le premier membre de l'égalité considérée en

$$2(\mathfrak{T}_p+\mathfrak{Q}_p),$$

et cette dernière quantité est égale à 2, puisque, par hypothèse, l'ensemble (117) vérifie l'égalité (43).

La quantité $(\mathfrak{Q}_n+\Omega_n)$ est un minimum parmi les valeurs que prend la somme $(\mathfrak{Q}+\Omega)$ lorsque les conditions (36), (30), (43) et (113) sont vérifiées. Il doit donc exister n constantes $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ telles que l'égalité

$$
(118)\quad \begin{aligned}
&\frac{\partial \mathfrak{Q}_n}{\partial F_n}\delta F + \frac{\partial \mathfrak{Q}_n}{\partial G_n}\delta G + \frac{\partial \mathfrak{Q}_n}{\partial H_n}\delta H + \frac{\partial \mathfrak{Q}_n}{\partial L_n}\delta L + \frac{\partial \mathfrak{Q}_n}{\partial M_n}\delta M + \frac{\partial \mathfrak{Q}_n}{\partial N_n}\delta N \\
&\quad + 2\int_2 \frac{d^2\varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial \Psi_n}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial \Psi_n}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial \Psi_n}{\partial z}\right)\right] \\
&\qquad\qquad \times\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial\,\delta\Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial\,\delta\Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial\,\delta\Psi}{\partial z}\right)\right] d\varpi_2 \\
&\quad - 2\int_\sigma \rho_0\frac{\partial V}{\partial n}\,\frac{\partial \Psi_n}{\partial n}\,\frac{\partial\,\delta\Psi}{\partial n}\,d\sigma \\
&\quad - \mu_1\left[\frac{\partial \Xi_1}{\partial F_1}\delta F + \frac{\partial \Xi_1}{\partial G_1}\delta G + \frac{\partial \Xi_1}{\partial H_1}\delta H + \frac{\partial \Xi_1}{\partial L_1}\delta L + \frac{\partial \Xi_1}{\partial M_1}\delta M + \frac{\partial \Xi_1}{\partial N_1}\delta N \right.\\
&\qquad\qquad \left. + 2\int_2 \rho_0\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x}\,\frac{\partial\,\delta\Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial y}\,\frac{\partial\,\delta\Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial z}\,\frac{\partial\,\delta\Psi}{\partial z}\right) d\varpi_2\right] \\
&\quad - \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad - \mu_n\left[\frac{\partial \Xi_n}{\partial F_n}\delta F + \frac{\partial \Xi_n}{\partial G_n}\delta G + \frac{\partial \Xi_n}{\partial H_n}\delta H + \frac{\partial \Xi_n}{\partial L_n}\delta L + \frac{\partial \Xi_n}{\partial M_n}\delta M + \frac{\partial \Xi_1}{\partial N_1}\delta N \right.\\
&\qquad\qquad \left. + 2\int_2 \rho_0\left(\frac{\partial \Psi_n}{\partial x}\,\frac{\partial\,\delta\Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_n}{\partial y}\,\frac{\partial\,\delta\Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_n}{\partial z}\,\frac{\partial\,\delta\Psi}{\partial z}\right) d\varpi_2\right] = 0
\end{aligned}
$$

soit vérifiée par tout ensemble

$$
(119)\qquad \delta F,\quad \delta G,\quad \delta H,\quad \delta L,\quad \delta M,\quad \delta N,\quad \delta\Psi(x, y, z)
$$

qui vérifie les conditions (45) et (46).

Démontrons que tous les coefficients μ sont nuls, sauf le coefficient μ_n.

Soit, en effet, p un indice inférieur à n.

A l'ensemble (119), nous pouvons substituer l'ensemble

$$
(120)\qquad kF_p,\quad kG_p,\quad kH_p,\quad kL_p,\quad kM_p,\quad kN_p,\quad k\Psi_p(x, y, z),
$$

où k est une quantité infiniment petite indépendante de x, y, z. L'ensemble (117), en effet, a été assujetti à vérifier les conditions de liaisons (36) et (38), en sorte que l'ensemble (120) vérifie les conditions (45) et (46).

Il est facile de voir que les trois premiers termes, au premier membre de l'égalité (118), deviennent ce que devient la quantité

$$(121)\quad \frac{\partial \mathfrak{Q}_p}{\partial F_p}\delta F + \frac{\partial \mathfrak{Q}_p}{\partial G_p}\delta G + \frac{\partial \mathfrak{Q}_p}{\partial H_p}\delta H + \frac{\partial \mathfrak{Q}_p}{\partial L_p}\delta L + \frac{\partial \mathfrak{Q}_p}{\partial M_p}\delta M + \frac{\partial \mathfrak{Q}_p}{\partial N_q}\delta N$$
$$+ 2\int_2 \frac{d^2\varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial \Psi_p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial \Psi_p}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial \Psi_q}{\partial z}\right)\right]$$
$$\times\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial\,\delta\Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial\,\delta\Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial\,\delta\Psi}{\partial z}\right)\right]d\varpi_2$$
$$- 2\int_\sigma \rho_0 \frac{\partial V}{\partial n}\frac{\partial \Psi_p}{\partial n}d\sigma$$

lorsqu'on y remplace l'ensemble (119) par l'ensemble

$$(122)\qquad kF_n,\quad kG_n,\quad kH_n,\quad kL_n,\quad kM_n,\quad kN_n,$$

ce qui est permis, car les conditions (36) et (38), vérifiées par l'ensemble (116), nous assurent que les conditions (45) et (46) sont vérifiées par l'ensemble (122).

Mais, par hypothèse, l'égalité

$$(49)\qquad \delta(\mathfrak{Q} + \Omega) - \lambda\,\delta(\mathfrak{S} + \tau) = 0$$

est vérifiée lorsqu'on y remplace :

λ par λ_p ;
l'ensemble (115) par l'ensemble (117) ;
l'ensemble (119) par des quantités quelconques vérifiant les conditions (45) et (46).

Quel que soit donc cet ensemble (119), la quantité (121) est égale à

$$\lambda_p\left[\frac{\partial \mathfrak{S}_p}{\partial F_p}\delta F + \frac{\partial \mathfrak{S}_p}{\partial G_p}\delta G + \frac{\partial \mathfrak{S}_p}{\partial H_p}\delta H + \frac{\partial \mathfrak{S}_p}{\partial L_p}\delta L + \frac{\partial \mathfrak{S}_p}{\partial M_p}\delta M + \frac{\partial \mathfrak{S}_p}{\partial N_p}\delta N\right.$$
$$\left. + 2\int_2 \rho_0\left(\frac{\partial \Psi_p}{\partial x}\frac{\partial\,\delta\Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_p}{\partial y}\frac{\partial\,\delta\Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_p}{\partial z}\frac{\partial\,\delta\Psi}{\partial z}\right)d\varpi_2\right].$$

Si l'on y substitue l'ensemble (122) à l'ensemble (119), cette quantité se réduit au produit par $k\lambda_p$ du premier membre de la $p^{\text{ième}}$ égalité (113), après qu'en celle-ci, on a substitué l'ensemble (116) à l'ensemble (115); mais cette dernière substitution transforme les égalités (113) en identités. L'ensemble des trois premiers termes, au premier membre de l'égalité (118), se réduit donc à zéro par substitution de l'ensemble (120) à l'ensemble (119).

Soit q un indice quelconque différent de p; la substitution de l'ensemble (120) à l'ensemble (119) donne au coefficient de μ_q, dans le premier membre de l'égalité (118), la valeur

$$- k\left[\frac{\partial\mathfrak{F}_q}{\partial F_q} F_p + \frac{\partial\mathfrak{F}_q}{\partial G_q} G_p + \frac{\partial\mathfrak{F}_q}{\partial H_q} H_p + \frac{\partial\mathfrak{F}_q}{\partial L_q} L_p + \frac{\partial\mathfrak{F}_q}{\partial M_q} M_p + \frac{\partial\mathfrak{F}_q}{\partial N_q} N_p \right.$$
$$\left. + 2\int_2 \rho_0 \left(\frac{\partial\Psi_q}{\partial x}\frac{\partial\Psi_p}{\partial x} + \frac{\partial\Psi_q}{\partial y}\frac{\partial\Psi_p}{\partial y} + \frac{\partial\Psi_q}{\partial z}\frac{\partial\Psi_p}{\partial z}\right) d\varpi_2\right].$$

Si q est inférieur à p, il est immédiatement évident que la quantité entre [ ] est nulle, car l'ensemble (117) a été assujetti à vérifier les $(p-1)$ premières conditions (113).

Si q est supérieur à p, on remarque que la quantité entre [ ] peut s'écrire

$$\frac{\partial\mathfrak{F}_p}{\partial F_p} F_q + \frac{\partial\mathfrak{F}_p}{\partial G_p} G_q + \frac{\partial\mathfrak{F}_p}{\partial H_p} H_q + \frac{\partial\mathfrak{F}_p}{\partial L_p} L_q + \frac{\partial\mathfrak{F}_p}{\partial M_p} M_q + \frac{\partial\mathfrak{F}_p}{\partial N_p} N_q$$
$$+ 2\int_2 \rho_0 \left(\frac{\partial\Psi_p}{\partial x}\frac{\partial\Psi_q}{\partial x} + \frac{\partial\Psi_p}{\partial y}\frac{\partial\Psi_q}{\partial y} + \frac{\partial\Psi_p}{\partial z}\frac{\partial\Psi_q}{\partial z}\right) d\varpi_2.$$

Elle est encore nulle, car l'ensemble

$$(123) \qquad F_q, \quad G_q, \quad H_q, \quad L_q, \quad M_q, \quad N_q, \quad \Psi_q(x, y, z)$$

a été assujetti à vérifier les $(q-1)$ premières conditions (113).

Considérons enfin, au premier membre de l'égalité (118), ce que le coefficient de μ_p devient par la substitution de l'ensemble (120) à l'ensemble (119). On voit immédiatement qu'il peut s'écrire

$$-2k(\mathfrak{F}_p + \tau_p),$$

et qu'il a pour valeur $-2k$, puisque l'ensemble (117) a été assujetti à vérifier la condition (43).

Par la substitution de l'ensemble (120) à l'ensemble (119), l'égalité (118) se réduit donc à

$$\mu_p = 0,$$

p étant un indice quelconque inférieur à n.

Effaçons, dans l'égalité (118), les $(n-1)$ termes affectés des coefficients $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$, puisque ces coefficients sont nuls, et voyons ce que devient l'égalité (118).

Cette égalité, vérifiée par tout ensemble (119) qui est assujetti aux conditions (45) et (46), est visiblement ce que devient la condition

$$(49) \qquad \delta(\mathfrak{Q}+\Omega)-\lambda\,\delta(\mathfrak{T}+\tau)=0.$$

lorsqu'on y remplace:
λ par μ_n,
et l'ensemble (115) par l'ensemble (116).

Nous savions déjà que l'ensemble (116) déterminait un des mouvements pendulaires du système ; nous voyons maintenant que μ_n est la valeur de λ qui correspond à ce mouvement pendulaire ; nous remplacerons désormais μ_n par λ_n.

Reprenons l'égalité (118), où nous devons faire

$$\mu_1=0, \qquad \ldots, \qquad \mu_{n-1}=0, \qquad \mu_n=\lambda_n.$$

A l'ensemble (119), substituons-y, ce qui est permis, l'ensemble

$$(124) \qquad k\mathrm{F}_n, \quad k\mathrm{G}_n, \quad k\mathrm{H}_n, \quad k\mathrm{L}_n, \quad k\mathrm{M}_n, \quad k\mathrm{N}_n, \quad k\Psi_n(x,y,z),$$

où k est une quantité infiniment petite indépendante de x, y, z.

L'égalité (118) devient, après suppression du facteur $2k$,

$$(\mathfrak{Q}_n+\Omega_n)-\lambda_n(\mathfrak{T}_n+\tau_n)=0.$$

Mais l'ensemble (116) étant assujetti à vérifier l'égalité (43), cette dernière égalité se réduit à

$$(114) \qquad \lambda_n=\mathfrak{Q}_n+\Omega_n.$$

La quantité λ_n est donc la plus petite valeur que puisse prendre la somme $(\mathfrak{Q}+\Omega)$ lorsque les quantités (115) sont assujetties aux conditions (36), (38), (43) et (113).

Il est immédiatement évident par là que la quantité λ_n ne peut être inférieure à aucune quantité λ_p d'indice p inférieur à n. La quantité λ_p, en effet, est la plus petite valeur que puisse prendre la somme $(\mathfrak{Q}+\Omega)$ lorsque l'ensemble (115) est assujetti aux conditions (36), (38), (43), et seulement aux $(p-1)$ premières conditions (113).

La règle énoncée est ainsi complètement justifiée.

X. — Corps flottant sur un fluide illimité.

Certaines parties des théories précédentes se simplifient grandement lorsque le volume du fluide qui porte le flotteur croît au delà de toute limite, pourvu, toutefois, que l'on admette certaines suppositions que nous allons énumérer :

1° Lorsqu'au sein de la masse fluide en équilibre, on s'éloigne indéfiniment de la région où se trouve le flotteur, la quantité $\frac{d^2\varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}$ ne croît pas au delà de toute limite.

2° Si la surface libre σ qui borne le fluide en équilibre s'étend à l'infini, la quantité $\rho_0 \frac{\partial V}{\partial n}$ ne croît pas au delà de toute limite lorsque le point auquel elle rapporte s'écarte indéfiniment, sur la surface σ, de la région où se trouve le flotteur.

3° Soient II un point marqué en la position d'équilibre du flotteur, (x, y, z) un point pris à l'intérieur de la masse fluide, r la distance du point (x, y, z) au point II ; lorsque r croît au delà de toute limite, les produits par r^2 des composantes de l'élongation et des composantes de la vitesse des divers mouvements réels ou fictifs que nous avons à considérer ne croissent pas au delà de toute limite.

Il résulte, en premier lieu, de ces suppositions que la quantité τ, définie par l'égalité (40), et que la quantité Ω, définie par l'égalité (42), gardent des valeurs finies et déterminées.

En second lieu, considérons un mouvement $\varepsilon\xi$, $\varepsilon\eta$, $\varepsilon\zeta$ du fluide qui soit *associé* au mouvement εF, εG, εH, εL, εM, εN du solide. Le second membre de l'identité (79), que doit vérifier la quantité Σ, est assurément fini ; au contraire, en vertu des inégalités (80) et (81) et des hypothèses précédentes, le coefficient de Σ est infiniment grand et positif, et cela lors même que la surface libre σ serait limitée. Nous voyons donc qu'en tout déplacement du fluide *associé* au déplacement du solide, nous devons avoir

$$\Sigma = 0. \tag{125}$$

L'égalité (76) nous montre alors que l'on doit avoir, en tout point de la masse fluide,

$$\delta\rho = 0 \tag{126}$$

ou bien, en vertu de l'égalité (73),

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho_0\xi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_0\eta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_0\zeta) = 0. \tag{127}$$

L'égalité (77) nous donne, en tout point de la surface libre,

$$\xi\cos(n, x) + \eta\cos(n, y) + \zeta\cos(n, z) = 0. \tag{128}$$

En un déplacement ASSOCIÉ *au déplacement du solide, le fluide se meut comme s'il était incompressible, et de telle sorte que la surface libre demeure invariable.*

Considérons, en particulier, un déplacement du fluide, *associé* au déplacement εF, εG, εH, εL, εM, εN du solide, et dépendant d'un potentiel $\varepsilon\Psi$ des élongations.

Les égalités (97) nous donneront ici

$$\Sigma_1 = 0, \qquad \Sigma_2 = 0, \qquad \Sigma_3 = 0, \qquad \Sigma_4 = 0, \qquad \Sigma_5 = 0, \qquad \Sigma_6 = 0. \tag{129}$$

On pourra encore écrire

$$\Psi = \Phi_1 F + \Phi_2 G + \Phi_3 H + \Phi_4 L + \Phi_5 M + \Phi_6 N. \tag{98}$$

En vertu des égalités (99) et (103), chacune des fonctions Φ vérifie l'égalité

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) = 0. \tag{130}$$

Chacune d'elles vérifie, en tous les points de la surface libre, et de la surface de la paroi immobile, s'il y en a une, l'égalité

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0, \tag{131}$$

en vertu des égalités (100) et (101), (104) et (105).

Enfin, en chaque point de la surface mouillée s_{23} du flotteur en équilibre, on a, en vertu des égalités (102) et (103),

$$
(132)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\cos(N_0, x) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial N_0} = 0, \qquad \dots,\\
y_0 \cos(N_0, z) - z_0 \cos(N_0, y) + &\frac{\partial \Phi_4}{\partial N_0} = 0, \qquad \dots.
\end{aligned}
\right.
$$

La détermination de chacune des fonctions Φ est ainsi ramenée à un problème du type suivant :

Un milieu conducteur, dont ρ_0 est le coefficient de conductibilité, occupe l'espace indéfini qu'occupait le fluide en l'état d'équilibre. Ce milieu ne renferme aucune source de chaleur. Le long de la surface σ et le long des surfaces des parois immobiles, s'il y en a, il est supposé contigu à des corps non-conducteurs. Des sources de chaleur données sont distribuées à la partie s_{23} de la surface du flotteur que mouille le fluide en équilibre. Déterminer l'état stationnaire de la température de ce corps.

La quantité τ se réduit encore, comme par le passé, à une certaine forme quadratique Θ, finie et bien déterminée, des quantités F, G, H, L, M, N. Si la surface mouillée s_{23} du flotteur est de révolution autour d'un certain axe, la forme Θ est nulle pour un ensemble de valeurs de F, G, H, L, M, N qui correspond à une rotation du flotteur autour de cet axe; elle est positive pour tout autre système de valeurs de F, G, H, L, M, N. Si la surface mouillée du flotteur n'est pas de révolution, la forme Θ est définie positive.

Les égalités (78) et (91) donnent l'égalité

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{G} = {} & \Sigma F \int_{s_{23}} \rho_0 \cos(N_0, x)\, ds_{23} + \dots \\
& + \Sigma L \int_{s_{23}} \rho_0 [y_0 \cos(N_0, z) - z_0 \cos(N_0, y)]\, ds_{23} + \dots
\end{aligned}
$$

que l'égalité (125) transforme en

$$
(133)\qquad \mathfrak{G} = 0.
$$

Ce dernier résultat apporte une simplification notable aux théorèmes qui ont été établis au paragraphe VIII, touchant la plus longue période que puisse présenter un mouvement pendulaire du système.

Lorsqu'un corps solide flotte à la surface d'un fluide compressible indéfini, la période la plus longue T_1 *que puisse affecter un mouvement pendulaire de ce flotteur est au plus égale, et est, en général, inférieure à la quantité* T_0 *telle que* $\frac{4\pi^2}{T_0^2}$ *soit la valeur minimum du rapport* $\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{S}+\Theta}$.

Pour que $T_1 = T_0$, *il faut et il suffit que la surface mouillée du flotteur soit de révolution autour d'un axe et que le mouvement pendulaire de plus longue période soit une oscillation autour de cet axe.*

Examinons le premier problème fictif dont voici l'énoncé :

On suppose qu'à chaque instant, les pressions exercées par le fluide sur le solide soient calculées non par les règles de l'Hydrodynamique, mais par les règles de l'Hydrostatique.

A chaque instant, on ajoute à la force vive réelle du flotteur une force vive fictive égale à celle qu'aurait le fluide en un MOUVEMENT FICTIF ASSOCIÉ *au mouvement du solide.*

En ce problème fictif, le solide est susceptible de mouvements pendulaires qui correspondent à six périodes réelles, positives, distinctes ou non.

T_0 *est la plus longue de ces périodes.*

A l'évaluation approchée de T_1 que nous fournit le calcul de T_0, nous pouvons substituer une autre évaluation, plus aisée à obtenir, mais dont l'approximation est ordinairement moindre.

Soit $\frac{4\pi^2}{T_0'^2}$ *la valeur minimum du rapport* $\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{S}}$; *la quantité* T'_0 *est au moins égale et, en général, elle est supérieure à la quantité* T_0 *et, partant, à la quantité* T_1.

Cette proposition peut encore s'énoncer d'autre manière : considérons, en effet, le second problème fictif dont voici l'énoncé :

Un corps solide flotte à la surface d'un fluide compressible de volume infini.

A chaque instant, on calcule selon les règles de l'Hydrostatique *les pressions exercées sur le solide, négligeant ainsi les forces d'inertie appliquées aux diverses masses élémentaires du fluide.*

On attribue au flotteur sa force vive réelle.

Les mouvements pendulaires d'un tel corps présentent six périodes réelles, positives, distinctes ou non.

La plus longue de ces périodes, T'_0, *est au moins égale à la plus longue période* T_1 *des mouvements pendulaires qu'en vérité le flotteur peut éprouver; en général, la première de ces périodes surpasse la seconde. Pour que les deux périodes* T'_0, T_1 *soient égales entre elles, il faut et il suffit que la surface mouillée du flotteur soit de révolution autour d'un axe, et qu'au second problème fictif, le mouvement pendulaire de plus longue période corresponde à une simple rotation autour de cet axe.*

Le problème fictif que nous venons de considérer en dernier lieu est la généralisation naturelle du problème que Poisson et Duhamel ont traité, en se bornant à considérer un fluide homogène et pesant. Même dans le cas où le fluide a un volume infini, ce problème fictif diffère grandement, on le voit, du problème véritable, et Clebsch a eu raison de signaler l'erreur que l'on commet en substituant un de ces problèmes à l'autre. Mais, DANS LE CAS OU LE VOLUME DU FLUIDE EST INFINI, *l'étude du problème fictif de Poisson et de Duhamel conduit, cependant, à énoncer d'une manière correcte les conditions de stabilité du flotteur.*

La méthode fictive dont nous parlons conduit, en effet, moyennant l'emploi du critérium des petits mouvements, à la proposition suivante :

Pour qu'un corps solide, flottant sur un fluide de volume infini, y soit en équilibre stable, il faut et il suffit que la quantité $\mathfrak{Q}$ *soit une forme définie positive des six quantités* F, G, H, L, M, N.

Or, à cause de l'égalité (133), c'est à cette condition que se réduit la condition donnée aux paragraphes 6 et 7.

XI. — Corps pesant flottant sur un fluide pesant, incompressible et homogène.

Il est aisé de développer une théorie analogue à la précédente dans le cas où le fluide, au lieu d'être compressible, est un liquide incompressible et homogène ; sans rechercher une généralité désormais inutile, nous supposerons que la pesanteur soit la seule action extérieure qui s'exerce sur les diverses parties du flotteur et du liquide.

Nous mettrons l'origine des coordonnées au centre de gravité de l'aire de flottaison du flotteur en équilibre ; nous prendrons pour axe des z la verticale dirigée vers le zénith, pour axes des x et des y les deux axes principaux d'inertie de l'aire de flottaison.

Dans ce cas, les divers coefficients A_{ij} sont tous nuls, sauf trois d'entre eux, qui ont les valeurs suivantes (¹):

$$(134)\qquad \left\{\begin{aligned} A_{33} &= g\rho s, \\ A_{44} &= g\rho j_x + \mathfrak{M}\, g(Z - Z'), \\ A_{55} &= g\rho j_y + \mathfrak{M}\, g(Z - Z'). \end{aligned}\right.$$

Dans ces formules,

g est l'intensité de la pesanteur ;
ρ la densité du liquide ;
s l'aire de la surface de flottaison ;
j_x, j_y, les moments d'inertie de cette aire par rapport aux axes des x et des y ;
$\mathfrak{M}$ la masse du flotteur ;
Z' la hauteur du centre de gravité de ce corps au-dessus de la surface libre du liquide en équilibre ;
Z la hauteur, au-dessus de la même surface, du centre de gravité du volume immergé.

Moyennant ces égalités (134), les formules (23), où nous devons, selon ce qui a été dit au paragraphe 3, effacer la constante C, fournis-

---

(¹) P. Duhem, *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants*, égalité (33) (*Journal de Mathématiques*, 5ᵉ série, t. I, 1895, p. 176).

sent les équations du mouvement du flotteur, qui sont donc les suivantes :

$$
(135)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\mathfrak{M} f''(t) + M_z g''(t) - M_y h''(t) + \int_{s_{23}} \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \cos(N_0, x)\, ds_{23} = 0,\\
&\mathfrak{M} g''(t) - M_z f''(t) + M_x h''(t) + \int_{s_{23}} \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \cos(N_0, y)\, ds_{23} = 0,\\
&g\rho s\, h(t) + \mathfrak{M} h''(t) + M_y l''(t) - M_x m''(t)\\
&\qquad + \int_{s_{23}} \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \cos(N_0, z)\, ds_{23} = 0,\\
&[g\rho j x + \mathfrak{M} g(Z - Z')]\, l(t)\\
&\quad + J_x l''(t) - P_{xy} m''(t) - P_{xz} n''(t) + M_y h''(t) - M_z g''(t)\\
&\qquad + \int_{s_{23}} \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} [y_0 \cos(N_0, z) - z_0 \cos(N_0, y)]\, ds_{23} = 0,\\
&[g\rho j y + \mathfrak{M} g(Z - Z')]\, m(t)\\
&\quad + J_y m''(t) - P_{xy} l''(t) - P_{yz} n''(t) + M_z f''(t) - M_x h''(t)\\
&\qquad + \int_{s_{23}} \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} [z_0 \cos(N_0, x) - x_0 \cos(N_0, z)]\, ds_{23} = 0,\\
&J_z n''(t) - P_{xz} l''(t) - P_{yz} m''(t) + M_x g''(t) - M_y f''(t)\\
&\qquad + \int_{s_{23}} \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} [x_0 \cos(N_0, y) - y_0 \cos(N_0, x)]\, ds_{23} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

La détermination des mouvements du fluide dépend de la détermination de la fonction ψ.

En chaque point du volume qu'occupait le fluide en équilibre, celle-ci doit vérifier l'équation

$$(136)\qquad \Delta\psi = 0$$

que fournit la condition de continuité, et qui remplace ici l'équation (24 *bis*).

A la surface libre σ du fluide en équilibre, $\frac{\partial \Pi_0}{\partial n} = \rho g$, en sorte que l'égalité (25 *bis*) devient maintenant l'égalité

$$(137)\qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - g \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0,$$

qui doit être vérifiée en tout point du plan $z = 0$.

Quant à l'équation (5), vérifiée en tout point de la surface s_{23} le long de laquelle le liquide mouille le flotteur en équilibre, et à l'équation (26), vérifiée en tout point de la paroi immobile, elles demeurent ici les mêmes que dans le cas général.

Si, dans les équations (135), on remplace partout $\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$ par zéro, comme l'ont fait Poisson et Duhamel, mais comme il est illégitime de le faire, selon la très juste remarque de Clebsch, on obtient ce que l'on nomme les *équations du mouvement infiniment petit d'un flotteur en milieu non résistant*. Ces équations s'intègrent sans difficulté; on en trouvera l'intégration détaillée en la *Théorie du navire* de MM. Pollard et Dudebout [1].

Nous ne savons même pas si le problème, simplifié de la sorte par une supposition incorrecte, fournit une approximation du problème véritable. Nous verrons tout à l'heure quel renseignement il est susceptible de nous fournir.

Lorsqu'aux équations (135), on remplace $\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$ par zéro, les quantités $f(t)$, $g(t)$ et $n(t)$ n'y figurent plus que par les dérivées secondes $f''(t)$, $g''(t)$ et $n''(t)$; on peut donc, à chacune de ces trois fonctions, ajouter une fonction linéaire arbitraire de t, en sorte qu'elle ne peut, en général, demeurer infiniment petite, quelque grand que soit t.

Qu'une circonstance analogue doive se présenter au problème véritable, cela est évident tout d'abord et sans aucun calcul. En effet, l'équilibre du flotteur n'est aucunement troublé si l'on imprime à ce corps une translation quelconque parallèle au plan horizontal ou une rotation quelconque autour d'un axe vertical; pour de tels déplacements, cet équilibre est indifférent. Si donc on veut étudier la stabilité de l'équilibre du flotteur ou les mouvements infiniment petits de ce corps, il faudra convenir que l'on regarde comme infiniment petit tout mouvement où $h(t)$, $l(t)$, $m(t)$ demeurent infiniment petits, quel que soit t, lors même qu'en ce mouvement quelqu'une des quantités $f(t)$, $g(t)$, $n(t)$ ne demeurerait pas infiniment petite.

En vertu des égalités (134), la quantité $\mathfrak{Q}$, définie par l'égalité (41),

---

[1] POLLARD et DUDEBOUT, *Théorie du navire*, t. II, pp. 212 et suiv. Paris, 1891.

se réduit à la forme

$$\mathfrak{Q} = g\rho s \mathrm{H}^2 + [g\rho j_x + \mathfrak{M} g(\mathrm{Z} - \mathrm{Z}')]\mathrm{L}^2 + [g\rho j_y + \mathfrak{M} g(\mathrm{Z} - \mathrm{Z}')]\mathrm{M}^2. \tag{138}$$

Étudions le déplacement $(\varepsilon\xi, \varepsilon\eta, \varepsilon\zeta)$ du fluide qui s'*associe* à un déplacement $(\varepsilon \mathrm{F}, \varepsilon \mathrm{G}, \varepsilon \mathrm{H}, \varepsilon \mathrm{L}, \varepsilon \mathrm{M}, \varepsilon \mathrm{N})$ du flotteur.

Le fluide étant incompressible, on devra avoir, en tout point du volume qu'il occupe en l'état d'équilibre,

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z} = 0. \tag{139}$$

Le long de la paroi immobile et de la surface mouillée du flotteur, ξ, η, ζ continueront de vérifier les équations (74) et (75).

Enfin, comme à la surface libre du liquide,

$$\cos(n, x) = 0, \qquad \cos(n, y) = 0, \qquad \cos(n, z) = -1, \qquad \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n} = -g,$$

l'équation (77), vérifiée en tout point de cette surface, deviendra

$$\zeta = \frac{\Sigma}{g}. \tag{140}$$

Pour qu'un déplacement du fluide soit ASSOCIÉ *à un déplacement du flotteur, il faut et il suffit qu'en ce déplacement du liquide, la surface libre demeure horizontale.*

On peut demander à l'équation (79) la détermination de la constante Σ. Il est plus simple de l'obtenir par un raisonnement direct. Le liquide étant incompressible, le volume dont le flotteur s'enfonce doit être égal au volume soulevé du liquide; si donc nous désignons par σ l'aire de la surface libre du liquide, nous devons avoir

$$s\mathrm{H} + \sigma\zeta = 0. \tag{141}$$

Cette égalité, jointe à l'égalité (140), donne

$$\Sigma = -\frac{gs\mathrm{H}}{\sigma}. \tag{142}$$

La quantité ϖ, donnée par l'égalité (91), devient

$$\varpi = -\Sigma^2 \int_\sigma \frac{\rho}{\frac{\partial V}{\partial n}} d\sigma,$$

et comme, en tout point de la surface σ, $\frac{\partial V}{\partial n} = -g$, cette égalité, jointe à l'égalité (142), donne

$$\varpi = \rho g \frac{s^2}{\sigma} H^2. \tag{143}$$

Les égalités (138) et (143) nous donnent

$$\begin{aligned}\mathfrak{Q} + \varpi = \rho g s\left(1 + \frac{s}{\sigma}\right)H^2 &+ [g\rho j_x + \mathfrak{M}\, g(Z - Z')]\, L^2 \\ &+ [g\rho j_y + \mathfrak{M}\, g(Z - Z')]\, M^2.\end{aligned} \tag{144}$$

Cette expression nous permet de discuter la stabilité de l'équilibre du flotteur, cette stabilité étant restreinte aux déplacements $h(t)$, $l(t)$, $m(t)$.

Le théorème de Lejeune-Dirichlet nous enseigne qu'il suffit, pour cette stabilité, que la somme $(\mathfrak{Q} + \varpi)$ soit une forme définie positive des quantités H, L, M. La méthode des petits mouvements, *si l'on en admet la légitimité*, nous enseigne que cette condition est non seulement suffisante, mais encore nécessaire. Nous obtenons donc la proposition suivante :

Pour qu'un solide pesant, flottant sur un liquide limité, soit en équilibre stable, il faut et il suffit que l'on ait les deux inégalités

$$\left\{\begin{aligned}&\rho j_x + \mathfrak{M}(Z - Z') > 0,\\ &\rho j_y + \mathfrak{M}(Z - Z') > 0.\end{aligned}\right. \tag{145}$$

Ces conditions, ne dépendant pas des dimensions du fluide, s'appliquent même à un corps pesant qui flotte sur un liquide illimité.

Ces conditions sont connues depuis Bouguer.

La quantité Θ se déterminera par la méthode générale qui a été indiquée au paragraphe 8.

La comparaison des égalités (96) et (142) nous montre que nous aurons ici

$$\Sigma_1 = 0, \qquad \Sigma_2 = 0, \qquad \Sigma_3 = -\frac{gs}{\sigma}, \qquad \Sigma_4 = 0, \qquad \Sigma_5 = 0, \qquad \Sigma_6 = 0.$$

Nous pourrons encore écrire l'égalité

$$\Psi = \Phi_1 F + \Phi_2 G + \Phi_3 H + \Phi_4 L + \Phi_5 M + \Phi_6 N + \chi, \tag{98}$$

où χ est une constante.

Chacune des fonctions Φ sera, en tout l'espace 2 qu'occupait le fluide au moment de l'équilibre, une fonction harmonique de x, y, z :

$$\Delta\Phi = 0.$$

Le long de la paroi immobile et aux divers points de la surface mouillée du flotteur, les diverses fonctions Φ vérifieront encore les conditions (100), (102), (104) et (106).

Aux divers points de la surface libre σ du fluide en équilibre ou, en d'autres termes, du plan $z = 0$, on doit encore écrire les équations telles que (101) et (105), qui deviennent :

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = 0, \qquad \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} = 0, \qquad \frac{\partial\Phi_3}{\partial n} = -\frac{s}{\sigma}, \qquad \frac{\partial\Phi_4}{\partial n} = 0, \qquad \frac{\partial\Phi_5}{\partial n} = 0, \qquad \frac{\partial\Phi_6}{\partial n} = 0.$$

Les diverses fonctions Φ et, partant, la grandeur Θ seront ainsi déterminées.

Si $\frac{4\pi^2}{T_0^2}$ *est la plus petite valeur de la quantité*

$$\frac{1}{\mathfrak{I} + \Theta} \Big\{ \rho g s \left(1 + \frac{s}{\sigma}\right) H^2 + [\rho g j_x + \mathfrak{M}\, g(Z - Z')] L^2 + [\rho g j_y + \mathfrak{M}\, g(Z - Z')] M^2 \Big\}, \tag{146}$$

nous savons que la plus longue période T_1 *d'un mouvement pendulaire que le flotteur puisse prendre est égale à* T_0 *au cas où la surface mouillée du flotteur est de révolution autour d'un axe et où ce mouvement pendulaire se réduit à une oscillation autour de cet axe; hors ce cas,* T_1 *est supérieur à* T_0.

Si, dans la quantité $\frac{\Theta}{2}$, nous remplaçons

$$F, \quad G, \quad H, \quad L, \quad M, \quad N$$

par

$$f'(t), \quad g'(t), \quad h'(t), \quad l'(t), \quad m'(n), \quad n'(t),$$

nous obtenons une forme quadratique $\mathfrak{T}'(t)$ de ces six dernières quantités; c'est la force vive du fluide en un *mouvement fictif associé* au mouvement du flotteur.

Lorsqu'on remplace les quantités

$$F, \quad G, \quad H, \quad L, \quad M, \quad N$$

par

$$f(t), \quad g(t), \quad h(t), \quad l(t), \quad m(t), \quad n(t),$$

Σ devient $\Sigma'(t)$. L'égalité (142) donne donc

$$\Sigma'(t) = -\frac{gs}{\sigma} h(t).$$

La *pression fictive associée* au mouvement du flotteur a été définie au paragraphe 8. C'est, en tout point de la surface mouillée s_{23} du flotteur, une pression normale, dirigée vers l'intérieur du flotteur, et qui a pour valeur

$$\Pi(t) = \rho \Sigma'(t)$$

ou bien, dans le cas actuel,

$$\Pi(t) = -\frac{\rho g s}{\sigma} h(t). \tag{147}$$

On voit sans peine que ces diverses pressions se composent en une force unique, appliquée au centre de gravité de l'aire de flottaison, qui nous sert d'origine de coordonnées; cette force est verticale, dirigée vers le haut, et a pour valeur

$$\mathfrak{Z} = -\frac{\rho g s^2}{\sigma} h(t). \tag{148}$$

Il est aisé maintenant, en suivant les indications données au paragraphe 8, et par une méthode semblable à celle qui nous a permis de former les équations (135), d'écrire les équations de notre *premier* *problème fictif*. Ces équations seront les suivantes :

$$
(149)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\mathfrak{M}\, f'' + \mathrm{M}_z g'' - \mathrm{M}_y h'' + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}'}{\partial f'} = 0,\\
&\mathfrak{M}\, g'' - \mathrm{M}_z f'' + \mathrm{M}_x h'' + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}'}{\partial g'} = 0,\\
&g\rho s\left(1 + \frac{s}{\sigma}\right)h + \mathfrak{M}\, h'' + \mathrm{M}_y l'' - \mathrm{M}_x m'' + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}'}{\partial h'} = 0,\\
&[g\rho j_x + \mathfrak{M}\, g(\mathrm{Z} - \mathrm{Z}')]\, l + \mathrm{J}_x l'' - \mathrm{P}_{xy} m'' - \mathrm{P}_{xz} n''\\
&\qquad\qquad + \mathrm{M}_y h'' - \mathrm{M}_z g'' + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}'}{\partial l''} = 0,\\
&[g\rho j_y + \mathfrak{M}\, g(\mathrm{Z} - \mathrm{Z}')]\, m + \mathrm{J}_y m'' - \mathrm{P}_{xy} l'' - \mathrm{P}_{yz} n''\\
&\qquad\qquad + \mathrm{M}_z f'' - \mathrm{M}_x h'' + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}'}{\partial m''} = 0,\\
&\mathrm{J}_z n'' - \mathrm{P}_{xz} l'' - \mathrm{P}_{yz} m'' + \mathrm{M}_x g'' - \mathrm{M}_y f'' + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial n''} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

En ces équations, comme en celles qu'ont traitées Poisson et Duhamel, les quantités $f(t)$, $g(t)$, $n(t)$ n'interviennent que par les dérivées secondes

$$
f''(t) = \frac{d^2 f(t)}{dt^2}, \qquad g''(t) = \frac{d^2 g(t)}{dt^2}, \qquad n''(t) = \frac{d^2 n(t)}{dt^2}.
$$

On peut donc ajouter arbitrairement à chacune de ces trois quantités une fonction linéaire à coefficients constants de t. Abstraction faite de la translation uniforme et de la rotation uniforme que l'on obtient ainsi, le système dont le mouvement est figuré par les équations (149) est susceptible de mouvements pendulaires qui admettent trois périodes distinctes; T_0 est la plus longue de ces trois périodes.

Considérons maintenant le rapport

$$
(150)\quad \frac{1}{2}\left\{ \rho g s\left(1 + \frac{s}{\sigma}\right)\mathrm{H}^2 + [\rho g j_x + \mathfrak{M}\, g(\mathrm{Z} - \mathrm{Z}')]\,\mathrm{L}^2 + [\rho g j_y + \mathfrak{M}\, g(\mathrm{Z} - \mathrm{Z}')]\,\mathrm{M}^2 \right\}.
$$

Ce rapport admet une valeur minimum $\frac{4\pi^2}{\mathrm{T}_0'^2}$. *La valeur* T_0' *est* *au moins égale et, en général, elle est supérieure à la plus longue période* T_1 *des mouvements pendulaires dont le système étudié est susceptible.*

La détermination de T'_0 se relie à un second problème fictif qui se déduit du précédent en biffant les termes qui dépendent de la force vive fictive $\mathfrak{T}'$. T'_0 *est la plus longue des périodes que puisse présenter un mouvement pendulaire capable d'intégrer les équations*

$$(151)\quad \left\{\begin{array}{l}
\mathfrak{M} f'' + M_z g'' - M_y h'' = 0,\\
\mathfrak{M} g'' - M_z f'' + M_x h'' = 0,\\
g\rho s\left(1 + \dfrac{s}{\sigma}\right)h + \mathfrak{M} h'' + M_y l'' - M_z m'' = 0,\\
[g\rho j_x + \mathfrak{M} g(Z - Z')]l + J_x l'' - P_{xy} m'' - P_{xz} n'' + M_y h'' - M_z g'' = 0.\\
[g\rho j_y + \mathfrak{M} g(Z - Z')]m + J_y m'' - P_{xy} l'' - P_{yz} n'' + M_z f'' - M_x h'' = 0,\\
J_x n'' - P_{xz} l'' - P_{yz} m'' + M_x g'' - M_y f'' = 0.
\end{array}\right.$$

Ces équations diffèrent en un seul point des équations auxquelles conduit la méthode de Poisson et de Duhamel, et dont la *Théorie du navire* de MM. Pollard et Dudebout présente l'intégration complète : le coefficient de h y est multiplié par le facteur $\left(1 + \dfrac{s}{\sigma}\right)$.

Ce facteur devient extrêmement grand dans le cas où le flotteur est contenu en un bassin fort étroit ; au contraire, il tend vers 1 lorsque la surface du bassin croît au delà de toute limite, ce qui justifie la proposition suivante :

Lorsqu'on étudie par la méthode de Poisson et de Duhamel les oscillations pendulaires d'un flotteur sur une nappe liquide infiniment étendue, la plus longue T'_0 *des périodes que l'on détermine est au plus égale à la plus longue période* T_1 *des mouvements pendulaires véritables du flotteur et, en général, elle est inférieure à* T_1.

Pour que T'_0 *soit égal à* T_1, *il faut et il suffit que la surface mouillée du flotteur soit de révolution autour d'un axe, et que le mouvement pendulaire le plus lent fourni par la méthode de Duhamel et de Poisson se réduise à une oscillation autour de cet axe.*

Dans ce cas, T'_0 *est aussi égal à la plus longue période* T_0 *que fournisse le premier problème fictif; hors ce cas,* T'_0 *est inférieur à* T_0.

XII. — Cas où le système étudié admet deux plans de symétrie.

Nous allons admettre maintenant que notre flotteur admette deux plans de symétrie; les navires ont un plan de symétrie, et beaucoup d'entre eux ne sont pas loin d'en admettre un second; l'hypothèse que nous faisons conduira donc à des résultats qui s'appliqueront sensiblement aux navires.

Les deux plans de symétrie seront nécessairement le plan zOx et le plan zOy. Nous supposerons que Ox soit l'axe qui correspond au plus petit moment d'inertie j_x de l'aire de la flottaison; nous nommerons cet axe l'*axe longitudinal;* la rotation $l(t)$ autour de cet axe sera le *roulis*. L'axe Oy prendra alors le nom d'*axe transversal;* la rotation $m(t)$ autour de cet axe se nommera *tangage*.

Ces hypothèses entraînent de grandes simplifications; elles donnent, en effet,

$$M_x = 0, \qquad M_y = 0,$$

$$P_{yz} = 0, \qquad P_{zx} = 0, \qquad P_{xy} = 0.$$

Les équations (135) se réduisent alors aux suivantes :

$$(152)\quad \left\{ \begin{aligned} & \mathfrak{M}\, f''(t) + M_z\, g''(t) + \int_{s_{23}} \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \cos(N_0, x)\, ds_{23} = 0, \\ & \mathfrak{M}\, g''(t) - M_z\, f''(t) + \int_{s_{23}} \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \cos(N_0, y)\, ds_{23} = 0, \\ & \rho g s\, h(t) + \mathfrak{M}\, h''(t) + \int_{s_{23}} \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \cos(N_0, z)\, ds_{23} = 0, \\ & [\rho g j_x + \mathfrak{M}\, g(Z - Z')]\, l(t) + J_x\, l''(t) - M_z\, g''(t) \\ & \qquad + \int_{s_{23}} \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} [y_0 \cos(N_0, z) - z_0 \cos(N_0, y)]\, ds_{23} = 0, \\ & [\rho g j_y + \mathfrak{M}\, g(Z - Z')]\, m(t) + J_y\, m''(t) + M_z\, f''(t) \\ & \qquad + \int_{s_{23}} \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} [z_0 \cos(N_0, x) - x_0 \cos(N_0, z)]\, ds_{23} = 0, \\ & J_z\, n''(t) + \int_{s_{23}} \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} [x_0 \cos(N_0, y) - y_0 \cos(N_0, x)]\, ds_{23} = 0. \end{aligned} \right.$$

La quantité $\mathfrak{Q}$ garde la forme donnée par l'égalité (138); l'égalité (8), qui fait connaître $\mathfrak{T}$, se réduit ici à

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{M}(F^2 + G^2 + H^2) + 2M_z(MF - GL) + J_x L^2 + J_y M^2 + J_z N^2. \tag{153}$$

Supposons maintenant que les parois du bassin où le flotteur se trouve primitivement en équilibre admettent également les deux plans de symétrie zOx, zOy; cette hypothèse n'exclura pas le cas où le flotteur est à la surface d'une nappe d'eau infiniment étendue suivant toute direction horizontale.

Le problème ainsi restreint admettra trois catégories particulières de solutions que nous désignerons respectivement par les noms de *vibration verticale pure*, de *roulis pur* et de *tangage pur*.

I. Vibration verticale pure. — Les équations (152) nous permettent de prendre constamment

$$l(t) = 0, \qquad m(t) = 0, \qquad n(t) = 0, \qquad f(t) = 0, \qquad g(t) = 0,$$

en prenant en même temps pour $\psi(x, y, z, t)$ une fonction qui ne change de valeur ni lorsqu'on change x en $-x$, ni lorsqu'on change y en $-y$: et c'est ce qui aura assurément lieu, puisque cette fonction est alors déterminée par les conditions suivantes :

1° Dans tout le volume que le fluide occupait au moment de l'équilibre, on a

$$\Delta\psi = 0; \tag{154}$$

2° En tout point de la surface σ par laquelle ce volume est contigu au plan $z = 0$, on a

$$g\frac{\partial\psi}{\partial n} - \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0; \tag{155}$$

3° En tout point de la surface mouillée s_{23} du flotteur, on a

$$\frac{\partial\psi}{\partial N_0} + \cos(N_0, z)\,h(t) = 0; \tag{156}$$

4° En tout point de la paroi du bassin, on a

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0. \tag{157}$$

Toutes les équations (152) sont identiquement vérifiées, sauf la troisième, qui garde la forme

$$\rho g s\, h(t) + \mathfrak{M}\, h''(t) + \int_{s_{23}} \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \cos(N_0, z)\, ds_{23} = 0. \tag{158}$$

Le problème particulier que définissent les équations (154) à (158) prête aux mêmes raisonnements, aux mêmes calculs que le problème général.

En ce problème, en vertu des égalités (138) et (153), nous aurons simplement

$$\mathfrak{Q} = \rho g s \mathrm{H}^2. \tag{159}$$

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{M}\, \mathrm{H}^2. \tag{160}$$

En un mouvement du liquide *associé* au mouvement du flotteur, la surface du liquide dans le bassin demeurera horizontale et s'élèvera d'une quantité

$$\zeta(t) = -\frac{s}{\sigma} h(t).$$

La forme $\mathfrak{E}$ sera encore donnée par l'égalité

$$\mathfrak{E} = \rho g \frac{s^2}{\sigma} \mathrm{H}^2. \tag{143}$$

Considérons un déplacement du fluide qui admette un potentiel des élongations $\varepsilon\Psi$ et qui soit *associé* au déplacement $\varepsilon\,\mathrm{H}$ du flotteur.

Nous prendrons

$$\Psi = \Phi \mathrm{H}.$$

La fonction $\Phi(x, y, z)$ devra vérifier :

1° En tout point du volume 2, l'équation

$$\Delta\Phi = 0; \tag{161}$$

2° En tout point de la surface σ, la condition

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \frac{s}{\sigma}; \tag{162}$$

3° En tout point de la surface s_{23} par laquelle le flotteur est contigu au liquide, la condition

$$(163) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial N_0} + \cos(N_0, z) = 0;$$

4° En tout point de la paroi

$$(164) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0.$$

La quantité essentiellement positive

$$(165) \qquad \mathfrak{M}' = \rho \int_2 \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] d\varpi_2$$

a les dimensions d'une masse; nous la nommerons la *masse fictive associée* au flotteur vibrant verticalement.

Nous pourrons écrire, dans le problème actuel,

$$(166) \qquad \Theta = \mathfrak{M}' H^2,$$

$$(167) \qquad \mathfrak{T}'(t) = \frac{\mathfrak{M}'}{2} [h'(t)]^2.$$

En reprenant les raisonnements qui ont été développés dans le cas général, nous trouverons que *la plus longue période* T_1 *que puisse présenter une vibration pendulaire verticale du flotteur est assurément supérieure à la quantité*

$$(168) \qquad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\mathfrak{M} + \mathfrak{M}'}{\rho g s \left(1 + \frac{s}{\sigma}\right)}}.$$

Cette période est celle du mouvement pendulaire qui satisfait à la *première équation fictive*

$$(169) \qquad \rho g s \left(1 - \frac{s}{\sigma}\right) h(t) + (\mathfrak{M} + \mathfrak{M}') h''(t) = 0.$$

T_0 *et, a fortiori,* T_1 *sont inférieurs à la quantité*

$$(170) \qquad T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{\mathfrak{M}}{\rho g s \left(1 - \frac{s}{\sigma}\right)}}.$$

qui est la période du mouvement pendulaire unique défini par la *seconde équation fictive*

$$(171)\qquad \rho g s\left(1+\frac{s}{\sigma}\right)h(t)+\mathfrak{M}\,h''(t)=0.$$

Dans le cas où la surface du fluide est infiniment étendue, on a

$$(172)\qquad T_0=2\pi\sqrt{\frac{\mathfrak{M}+\mathfrak{M}'}{\rho g s}},$$

$$(173)\qquad T'_0=2\pi\sqrt{\frac{\mathfrak{M}}{\rho g s}}.$$

Cette valeur (173) de T'_0 est celle que fournit la méthode de Poisson et de Duhamel.

II. Roulis pur. — Nous pouvons satisfaire aux équations (152) en prenant constamment

$$f(t)=0,\qquad g(t)=0,\qquad h(t)=0,\qquad m(t)=0,\qquad n(t)=0,$$

pourvu qu'en même temps la fonction $\psi(x, y, z, t)$ soit douée de ces deux propriétés :

1° Elle change de signe, sans changer de valeur absolue, lorsque l'on change x en $-x$;

2° Elle ne change pas lorsque l'on change y en $-y$.

Or, elle peut être choisie ainsi; elle est assujettie, en effet, aux conditions (154), (155) et (157); en outre, en tout point de la surface mouillée s_{23} du flotteur, on doit avoir

$$(174)\qquad \frac{\partial\psi}{\partial N_0}+[y_0\cos(N_0, z)-z_0\cos(N_0, y)]\,l(t)=0.$$

Les équations (152) sont toutes identiquement vérifiées, sauf la quatrième qui se réduit à

$$(175)\qquad \begin{aligned}&[\rho g j_x+\mathfrak{M}\,g(Z-Z')]\,l(t)+J_x\,l''(t)\\&\quad+\int_{s_{23}}\rho\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}[y_0\cos(N_0, z)-z_0\cos(N_0, y)]\,ds_{23}=0.\end{aligned}$$

Ce problème particulier donne encore lieu à des raisonnements et à des calculs semblables à ceux qui ont été développés dans le cas général.

En ce problème particulier, les égalités (138) et (153) donnent

$$(176)\qquad \mathfrak{Q} = [\rho g j_x + \mathfrak{M}\, g(Z - Z')]\, L^2,$$

$$(177)\qquad \mathfrak{S} = J_x L^2.$$

En un déplacement du fluide *associé* au déplacement du flotteur, la surface libre du liquide demeure immobile, en sorte que l'on a

$$(178)\qquad \mathfrak{T} = 0.$$

Au déplacement εL du solide, nous pouvons *associer* un déplacement du liquide qui dépende d'un potentiel $\varepsilon\Psi$ des élongations. Posons

$$\Psi = \Phi l.$$

La fonction Φ devra vérifier l'équation de Laplace

$$(179)\qquad \Delta\Phi = 0$$

en tout point du volume qu'occupe le fluide en équilibre; en tout point de la paroi immobile ou de la surface libre, on aura

$$(180)\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0;$$

enfin, en tout point de la surface mouillée s_{23} du flotteur, on aura

$$(181)\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial N_0} + y_0 \cos(N_0, z) - z_0 \cos(N_0, y) = 0.$$

La quantité

$$(182)\qquad J'_x = \rho \int_2 \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right] d\varpi_2$$

a les mêmes dimensions qu'un moment d'inertie; elle est essentiellement positive, à moins que la surface mouillée du navire ne soit de révolution autour de l'axe longitudinal; dans ce dernier cas, elle est nulle. Nous donnerons à cette quantité le nom de *moment fictif d'inertie par rapport à l'axe longitudinal*.

Nous aurons, dans le cas qui nous occupe en ce moment,

$$\Theta = J'_x L^2, \tag{183}$$

$$\mathfrak{T}'(t) = \frac{J'_x}{2} [l'(t)]^2. \tag{184}$$

En appliquant alors à ce cas particulier les propositions démontrées dans le cas général, nous obtenons les théorèmes suivants :

Si la surface mouillée du navire est de révolution autour de l'axe de plus petite inertie de l'aire de la flottaison, la période T_1 *que présente un roulis pendulaire pur est unique et a pour valeur*

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_x}{\rho g j_x + \mathfrak{M}\, g(Z - Z')}}. \tag{185}$$

Si la surface mouillée du navire n'est pas de révolution autour de l'axe longitudinal, le roulis pendulaire pur peut présenter une infinité de périodes dont la plus longue, T_1, *est assurément supérieure à la quantité*

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_x + J'_x}{\rho g j_x + \mathfrak{M}\, g(Z - Z')}}, \tag{186}$$

et, a fortiori, à la quantité

$$T'_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_x}{\rho g j_x + \mathfrak{M}\, g(Z - Z')}}. \tag{187}$$

T_0 est la période du mouvement pendulaire qui intègre la *première équation fictive*

$$[\rho g j_x + \mathfrak{M}\, g(Z - Z')]\, l(t) + (J_x + J'_x)\, l''(t) = 0. \tag{188}$$

T'_0 est la période du mouvement pendulaire qui intègre la *seconde équation fictive*

$$[\rho g j_x + \mathfrak{M}\, g(Z - Z')]\, l(t) + J_x\, l''(t) = 0. \tag{189}$$

Cette dernière est l'équation qu'ont étudiée Poisson et Duhamel.

A quel point la connaissance de la quantité T'_0 renseigne incomplètement au sujet de la plus longue période T_1 du roulis pur, nous allons le reconnaître par les considérations suivantes :

Imaginons, tout d'abord, que la surface mouillée du navire soit de révolution autour de l'axe longitudinal; la période véritable du roulis pur, donnée alors par l'égalité (185), est égale à la quantité T'_0 donnée par l'égalité (187).

A ce navire, ajoutons des *quilles* dont l'épaisseur et, partant, le volume et la masse soient négligeables; l'adjonction de ces quilles ne modifie en rien la valeur de la quantité T'_0 donnée par l'égalité (187).

En revanche, le moment fictif d'inertie J'_x, nul avant l'addition de ces quilles, est rendu positif par cette addition; T_0 a maintenant une valeur supérieure à T'_0; *a fortiori* en est-il de même de T_1, qui est désormais supérieur à T_0. L'addition des quilles a donc sûrement fait croître la période la plus longue du roulis pur du navire; l'emploi de la méthode de Poisson et de la formule (187) ne permet pas de prévoir cette influence exercée par des quilles sur le roulis; la formule (186) fait prévoir l'existence et le sens de cette influence, mais elle ne permet pas d'en évaluer la grandeur.

III. Tangage pur. — On pourra vérifier les équations (152) en faisant constamment

$$f(t)=0, \qquad g(t)=0, \qquad h(t)=0, \qquad l(t)=0, \qquad n(t)=0,$$

et en prenant pour $\psi(x,y,z,t)$ une fonction paire de x et impaire de y. On aura alors un *tangage pur* qui se traitera exactement comme le roulis pur. *La période la plus longue* T_1 *que puisse présenter un tangage pendulaire pur, en un flotteur dont la surface mouillée n'est pas de révolution autour de l'axe transversal, est assurément plus grande que la valeur*

$$(190) \qquad T'_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_y}{\rho g I_y + \mathfrak{M}\, g(Z-Z')}}$$

attribuée à cette période par la théorie de Poisson et de Duhamel.

En résumé, les objections de principe que Clebsch a élevées contre la théorie des oscillations des corps flottants développée par Poisson et par Duhamel sont pleinement justifiées; les suppositions admises par cette théorie sont gravement erronées. Cependant, les conséquences auxquelles elle conduit ne sont pas toutes à rejeter. Les conditions de stabilité qu'elle a formulées sont exactes. Appliquée à un navire doublement symétrique qui flotte sur une mer illimitée, à chacune des trois sortes d'oscillations pendulaires simples, vibration verticale pure, roulis pur, tangage pur, elle attribue des périodes déterminées; ces périodes ne sont pas égales aux plus longues périodes des oscillations véritables; mais on peut toujours affirmer que celles-ci sont respectivement supérieures à celles-là.

Sur le mouvement d'une bille de billard avec frottement de roulement;

Par M. Paul APPELL.

1. Le problème du mouvement d'une bille de billard, avec frottement de glissement, est classique [1]. Mais il paraît intéressant d'étudier le mouvement plus complètement, en tenant compte également du frottement de roulement, qu'on peut négliger dans une première approximation.

2. Prenons comme plan $\xi O \eta$ le plan du tapis, comme axe $O\zeta$ un axe perpendiculaire vers le haut. La bille, étant supposée composée de couches concentriques et homogènes, a pour centre de gravité G le centre de figure : les coordonnées de ce point sont $\xi, \eta, \zeta = R$, en appelant R le rayon de la bille. Soient $Gxyz$ des axes parallèles aux axes fixes menés par G; p, q, r les composantes de la rotation instantanée ω de la bille par rapport à ces axes. Désignons par V la vitesse de la molécule de la bille située, à l'instant t, au point de contact A avec le tapis, et α l'angle de V avec l'axe $O\xi$: les composantes u, v, w de V, suivant les axes, sont

$$(1) \qquad u = V\cos\alpha, \qquad v = V\sin\alpha, \qquad w = 0.$$

On a, d'autre part, en considérant cette vitesse comme résultant de la vitesse due à la translation des axes $Gxyz$ et de la rotation instan-

(1) *Voyez*, par exemple, mon *Traité de Mécanique*, t. II. — On trouvera des indications bibliographiques dans l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*, IV, 6 : *Elementare Dynamik der Punktsysteme und starren Körper*, von Paul Stäckel, p. 652.

tanée de la sphère, par rapport à ces axes,

$$(2)\qquad u = \xi' - qR, \qquad v = \eta' + pR,$$

les accents désignant les dérivées de ξ, η par rapport à t.

Désignons de même par Ω *la projection horizontale* de la rotation instantanée ω de la sphère dans son mouvement autour de G. Le vecteur Ω est issu de A, et il a pour projections

$$(3)\qquad p = \Omega\cos\beta, \qquad q = \Omega\sin\beta,$$

où β désigne l'angle de Ω avec $O\xi$. La réaction normale n du plan sur la sphère est verticale ascendante et a pour grandeur $n = mg$, où m est la masse totale de la bille. La force du frottement de glissement, à l'état de glissement, est une force F, dirigée en sens contraire de V, ayant pour intensité $fn = fmg$, où f est le coefficient du frottement de glissement ; cette force F a pour projection

$$X = -fmg\cos\alpha, \qquad Y = -fmg\sin\alpha, \qquad Z = 0.$$

L'axe du couple du frottement de roulement est un vecteur H dirigé en sens contraire de Ω, ayant pour grandeur $\delta n = \delta mg$, δ étant une longueur appelée *coefficient du frottement de roulement* (Voyez *Traité de Mécanique*, t. II, Chap. XIX) : cet axe de couple H a pour projections

$$L = -\delta mg\cos\beta, \qquad M = -\delta mg\sin\beta, \qquad N = 0.$$

Enfin le frottement de pivotement se traduit par un couple dont l'axe K est dirigé en sens contraire de la composante verticale r de la rotation instantanée ω de la bille ; il a pour grandeur εmg, ε désignant un coefficient linéaire appelé *coefficient du frottement de pivotement*.

Dans ces conditions, en supposant qu'il y ait à la fois glissement, roulement et pivotement, on a, pour les équations du mouvement,

$$(4)\qquad \begin{cases} m\xi'' = X, & m\eta'' = Y, \\ mk^2p' = RY + L, & mk^2q' = -RX + M, \end{cases}$$

$$(5)\qquad mk^2r' = \pm\varepsilon mg,$$

où il faut prendre $-$ si r est positif et $+$ si r est négatif. Les accents désignent des dérivées par rapport à t, et mk^2 le moment d'inertie de la bille par rapport à un diamètre.

Supposons, pour fixer les idées, r_0 positif; la dernière équation, avec le signe $-$, donne alors

$$k^2(r - r_0) = -\varepsilon g t;$$

donc, à l'instant

$$t_1 = \frac{k^2 r_0}{\varepsilon g},$$

le pivotement est *nul :* il reste ensuite nul. Il suffit donc d'étudier les quatre équations (4).

Calculons les dérivées u' et v' de u et v par rapport à t

$$u' = \xi'' - R q', \qquad v' = \eta'' + R p';$$

nous avons

$$mu' = X\left(1 + \frac{R^2}{k^2}\right) - \frac{R}{k^2} M,$$
$$mv' = Y\left(1 + \frac{R^2}{k^2}\right) + \frac{R}{k^2} L,$$

ou, en remplaçant X, Y, L, M par leurs valeurs,

$$(6)\qquad \begin{cases} u' = -fg\left(1 + \dfrac{R^2}{k^2}\right)\cos\alpha + \dfrac{R\delta}{k^2} g \sin\beta, \\ v' = -fg\left(1 + \dfrac{R^2}{k^2}\right)\sin\alpha - \dfrac{R\delta}{k^2} g \cos\beta. \end{cases}$$

Comme $u = V\cos\alpha$, $v = V\sin\alpha$, ces équations deviennent

$$V'\cos\alpha - V\sin\alpha\alpha' = -fg\left(1 + \frac{R^2}{k^2}\right)\cos\alpha + \frac{R\delta}{k^2} g \sin\beta,$$
$$V'\sin\alpha + V\cos\alpha\alpha' = -fg\left(1 + \frac{R^2}{k^2}\right)\sin\alpha - \frac{R\delta}{k^2} g \cos\beta;$$

d'où

$$(7)\qquad \begin{cases} V' = -fg\left(1 + \dfrac{R^2}{k^2}\right) + \dfrac{R\delta}{k^2} g \sin(\beta - \alpha), \\ V\alpha' = -\dfrac{R\delta}{k^2} g \cos(\beta - \alpha). \end{cases}$$

D'autre part, dans les équations (4), remplaçant p et q par $\Omega\cos\beta$

et $\Omega \sin\beta$, nous avons

$$\Omega' \cos\beta - \Omega \sin\beta\beta' = -\frac{fR}{k^2} g \sin\alpha - \frac{\delta}{k^2} g \cos\beta.$$

$$\Omega' \sin\beta + \Omega \cos\beta\beta' = +\frac{fR}{k^2} g \cos\alpha - \frac{\delta}{k^2} g \sin\beta;$$

d'où

$$(8) \qquad \begin{cases} \Omega' = \dfrac{fR}{k^2} g \sin(\beta - \alpha) - \dfrac{\delta}{k^2} g, \\ \Omega\beta' = \dfrac{fR}{k^2} g \cos(\beta - \alpha). \end{cases}$$

Ces quatre équations (7) et (8) présentent une symétrie digne d'attention entre le glissement et la rotation; elles donnent V, Ω, α et β en fonction de t et des conditions initiales. On aura immédiatement, une fois ces quantités connues, u, v, p et q, puis ξ et η par des quadratures.

Ces équations subsistent tant qu'il y a, en même temps, glissement et roulement. Elles doivent être modifiées à partir du moment où l'on aurait constamment $V = 0$ (pas de glissement), avec $\Omega \neq 0$, ou $\Omega = 0$ (pas de roulement) avec $V \neq 0$: le dernier cas n'a qu'un intérêt mathématique, car, en réalité, si à un instant on avait $\Omega = 0$ et $V \neq 0$, le roulement reparaîtrait immédiatement. Nous reviendrons sur ces cas plus loin.

5. *Vérification pour le cas classique où l'on néglige le frottement de roulement.* — Si l'on suppose $\delta = 0$, on a

$$\alpha' = 0;$$

donc α reste constant. La vitesse de glissement V est parallèle à une direction fixe qu'on peut toujours prendre pour direction $O\xi$, de façon que $\alpha = 0$, $u = V$, $v = 0$. La grandeur V de la vitesse de glissement est alors donnée par

$$V - V_0 = -fgt\left(1 + \frac{R^2}{k^2}\right);$$

elle s'annule au bout d'un temps fini, puis reste nulle.

On a en même temps, d'après (4),

$$p = \Omega \cos\beta = \Omega_0 \cos\beta_0,$$
$$q = \Omega \sin\beta = \frac{fR}{k^2} gt + \Omega_0 \sin\beta_0,$$

jusqu'au moment où $V = 0$.

On a de plus

$$\xi' = u + qR, \qquad \eta' = v - pR,$$
$$\xi' = V_0 + R\Omega_0 \sin\beta_0 - fgt,$$
$$\eta' = \qquad - R\Omega_0 \cos\beta_0;$$

d'où l'on déduit, en intégrant, le mouvement parabolique du centre, jusqu'au moment où $V = 0$.

4. *Cas analogue obtenu en supposant le frottement de glissement nul et le frottement de roulement différent de zéro.* — Au point de vue analytique on pourrait supposer $f = 0$, $\delta \neq 0$; mais ce cas est purement idéal. On aurait alors

$$\beta' = 0, \qquad \beta = 0,$$

en prenant $O\xi$ parallèle à Ω : puis

$$\Omega - \Omega_0 = -\frac{\delta}{k^2} gt;$$

Ω a donc une direction fixe et s'annule au bout d'un temps fini ; $p = \Omega$, $q = 0$. Les équations (6), où $f = 0$, $\beta = 0$, donnent alors

$$u = V \cos\alpha = V_0 \cos\alpha_0,$$
$$v = V \sin\alpha = -\frac{R\delta}{k^2} gt + V_0 \sin\alpha_0.$$

Les expressions de ξ' et η' deviennent dans ce cas

$$\xi' = V_0 \cos\alpha_0,$$
$$\eta' = V_0 \sin\alpha_0 - \Omega_0 R,$$

ce qui donne un mouvement rectiligne uniforme pour le centre.

5. Avant de discuter les équations générales, remarquons qu'au

point de vue des Mathématiques pures, il y aurait différents cas à distinguer suivant les grandeurs relatives des coefficients.

Nous n'envisagerons que le cas réel du billard ordinaire, dans lequel le frottement de roulement a une importance beaucoup plus petite que le frottement de glissement. Nous admettrons que le coefficient δ est assez petit pour que

$$\delta < f\mathrm{R}. \tag{9}$$

Dans cette hypothèse la discussion se simplifie comme il suit.

6. *Cas où la rotation* Ω_0 *est nulle à l'instant initial*, V_0 *étant différent de zéro.* — Dans ce cas, la rotation ne peut pas rester nulle : nous allons voir en effet qu'on arriverait à une contradiction en imaginant un mouvement avec glissement sans roulement. Dans cette hypothèse $\Omega = 0$, le couple du frottement de roulement devrait suivre les lois du frottement de roulement au repos : l'axe de ce couple serait un vecteur H_1, appliqué à A, opposé au sens faisant avec $\mathrm{O}\xi$ un certain angle β, et ayant pour grandeur $\delta_1 mg$, δ_1 étant un coefficient linéaire moindre que δ, $\delta_1 \leqq \delta$.

En écrivant dans cette hypothèse les équations du mouvement, on aurait des équations de la forme (7) et (8), où δ serait remplacé par δ_1 et Ω par zéro. Les équations (8) donneraient en particulier

$$\begin{aligned} \cos(\beta - \alpha) \qquad &= 0, \\ f\mathrm{R}\sin(\beta - \alpha) - \delta_1 &= 0. \end{aligned}$$

La première donne $\beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$. En portant dans la deuxième équation on voit que $\beta - \alpha$ ne peut pas être égal à $\frac{3\pi}{2}$, car les deux termes seraient négatifs. On doit donc avoir $\beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$, d'où

$$f\mathrm{R} - \delta_1 = 0.$$

Mais cette relation est impossible, car

$$\delta_1 \leqq \delta \qquad \text{et} \qquad \delta < f\mathrm{R}.$$

Donc le mouvement supposé, glissement sans roulement, est impossible; tant qu'il y a glissement, il y a en même temps roulement.

7. *Cas où le glissement est nul à l'instant initial* $V_0 = 0$. — Si, au contraire, le glissement est nul, à un certain instant qu'on peut toujours regarder comme initial, le glissement reste nul par la suite.

En effet, nous allons voir qu'un roulement sans glissement vérifie les équations du mouvement. S'il n'y a pas glissement, la force F du frottement de glissement vérifie les lois du frottement de glissement à l'état de repos. Cette force a une direction inconnue *a priori;* nous la supposerons de sens opposé au vecteur qui ferait un angle α avec $O\xi$; elle a pour grandeur

$$f_1 mg,$$

f_1 étant inférieur ou égal à f,

$$f_1 \leqq f.$$

Dans ces conditions, les équations du mouvement conservent les formes (7) et (8) avec $V = 0$, f étant remplacé par f_1. Les équations (7) deviennent alors

$$\cos(\beta - \alpha) = 0,$$

$$-f_1\left(1 + \frac{R^2}{k^2}\right) + \frac{R\delta}{k^2}\sin(\beta - \alpha) = 0.$$

Il faut prendre encore $(\beta - \alpha) = \frac{\pi}{2}$ pour que la seconde équation puisse être satisfaite; puis on a, par la seconde,

$$(10) \qquad f_1 = \frac{\delta}{R}\,\frac{1}{1 + \dfrac{k^2}{R^2}},$$

valeur de f_1 qui est bien inférieure à f, car $\frac{\delta}{R}$ est supposé inférieur à f (n° 5).

Le mouvement persiste donc dans ces conditions : V reste nul, $\beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$, et f_1 conserve la valeur constante (10) inférieure à f.

Les équations (8) montrent alors que $\beta' = 0$, $\beta = \beta_0$, et que

$$\Omega' = -\frac{\delta - f_1 R}{k^2}g,$$

ou, en remplaçant f_1 par sa valeur (10),

$$\Omega' = -\frac{\delta g}{R^2 + k^2};$$

Ω diminue donc proportionnellement au temps et s'annule au bout d'un temps

$$t_1 = \Omega_0 \frac{R^2 + k^2}{\delta g}.$$

Les coordonnées du centre sont données par

$$\xi' = qR, \qquad \eta' = -pR,$$

car $u = v = 0$. On peut supposer $\beta = 0$. Alors $p = \Omega$, $q = 0$. Donc le centre est animé d'un mouvement rectiligne perpendiculaire à la direction de la rotation instantanée, uniformément retardé. L'accélération de ce mouvement est

$$\eta'' = -Rp' = -R\Omega' = +\frac{\delta R}{R^2 + k^2} g.$$

8. *Cas général.* — Supposons maintenant que $V_0 > 0$, $\Omega_0 > 0$. Au début il existe, à la fois, un glissement et un roulement.

Les équations (7) et (8) commencent par être applicables, jusqu'au moment où l'une des deux grandeurs V ou Ω s'annule. Si Ω s'annule avant V, à un instant t_0, immédiatement après Ω cesse d'être nul, d'après le cas particulier du n° **6**.

Si, au contraire, V s'annule, il reste nul, d'après le cas examiné au n° **7**.

Or les équations du mouvement montrent que V diminue constamment et s'annule au bout d'un temps fini. En effet,

$$\sin(\beta - \alpha) \leq 1;$$

donc la première équation (7) donne

$$V' < -fg\left(1 + \frac{R^2}{k^2}\right) + \frac{R\delta}{k^2} g,$$

et, comme

$$\delta < fR,$$

a fortiori

$$V' < -fg;$$

donc

$$V - V_0 < -fgt,$$

et V s'annule au bout d'un temps moindre que $\frac{V_0}{fg}$. A partir de ce moment, le mouvement se fait suivant les lois du n° **7**.

Les équations du mouvement admettent une intégrale qu'on obtient en éliminant $\sin(\beta - \alpha)$ entre la première des équations (7) et la première des équations (8) : on a ainsi

$$fV' - \delta\Omega' = -f^2 g\left(1 + \frac{R^2}{k^2}\right) + \frac{\delta^2}{k^2} g,$$

où le second membre est négatif à cause de l'hypothèse $\delta < fR$. Pendant la période considérée du mouvement, où V et Ω sont différents de zéro tous deux, la quantité

$$fV - \delta\Omega$$

diminue donc proportionnellement au temps :

$$(11) \qquad fV - \delta\Omega = fV_0 - \delta\Omega_0 - \left[f^2\left(1 + \frac{R^2}{k^2}\right) - \frac{\delta^2}{k^2}\right] gt.$$

Nous pouvons également remarquer la forme que prend l'équation des forces vives. La force vive totale est

$$m[\xi'^2 + \eta'^2 + k^2(p^2 + q^2 + r^2)],$$

c'est-à-dire

$$2T = m[V^2 + R^2\Omega^2 + 2R\Omega V \sin(\beta - \alpha) + k^2(\Omega^2 + r^2)].$$

On a alors

$$dT = -mfgV\,dt - m\,\delta g\,\Omega\,dt \pm \varepsilon mgr\,dt,$$

où le signe devant le dernier terme est contraire à celui de r. Dans cette relation les termes en r se détruisent. Le second membre est essentiellement négatif : la force vive va constamment en diminuant, et cela dans toutes les phases du mouvement, jusqu'au moment où la bille s'arrête.

Signalons encore la relation

$$\frac{d}{dt}[\Omega V \cos(\beta - \alpha)] = \Omega V \cos(\beta - \alpha)\left[-\frac{fg\left(1 + \frac{R^2}{k^2}\right)}{V} - \frac{\delta g}{\Omega k^2}\right].$$

Le coefficient du second membre est essentiellement négatif; la valeur absolue de

$$\Omega V \cos(\beta - \alpha)$$

va donc constamment en diminuant; elle s'annule au bout d'un temps fini, car V au moins s'annule, comme nous l'avons vu.

On peut enfin être renseigné sur le sens de la variation de $\beta - \alpha$, en remarquant que β' et α' sont de signes contraires et qu'on a :

$$\beta' - \alpha' = \frac{Rg}{k^2}\left(\frac{f}{\Omega} + \frac{\delta}{V}\right)\cos(\beta - \alpha),$$

où le coefficient de $\cos(\beta - \alpha)$ est positif. Par exemple, si l'angle $\beta - \alpha$ est d'abord positif et aigu, il augmente constamment et devient droit en un temps fini, parce que $U < V_0 - fgt$.

9. *Problème de l'intégration.* — Nous avons donné des indications qualitatives sur la marche générale du mouvement. Mais il reste à résoudre le problème de l'intégration des quatre équations (7) et (8) définissant V, Ω, α et β en fonction de t.

Posons pour abréger

$$fV = x, \qquad \delta\Omega = y, \qquad \beta - \alpha = \theta,$$
$$a = f^2\left(1 + \frac{R^2}{k^2}\right)g, \qquad b = f\frac{R\delta}{k^2}g, \qquad c = \frac{\delta^2}{k^2}g;$$

a, b, c sont des constantes positives qui, dans le problème réel, vérifient les inégalités

$$a > b > c,$$

parce que $\delta < fR$.

Les quatre équations (7) et (8) s'écrivent alors

$$(12) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -a + b\sin\theta, \\ x\frac{d\alpha}{dt} &= -b\cos\theta, \\ \frac{dy}{dt} &= b\sin\theta - c, \\ y\frac{d\beta}{dt} &= b\cos\theta, \\ \beta - \alpha &= \theta. \end{aligned}\right.$$

Écrivons-les

$$(13)\qquad \frac{dx}{-a+b\sin\theta}=\frac{dy}{b\sin\theta-c}=\frac{d\beta}{\dfrac{b}{y}\cos\theta}=\frac{-d\alpha}{\dfrac{b}{x}\cos\theta}=\frac{d\theta}{b\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\cos\theta}=dt;$$

nous aurons, en égalant les deux premiers rapports au cinquième, les équations

$$(14)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{xy}{x+y}\left(\operatorname{tang}\theta-\dfrac{a}{b\cos\theta}\right), \\[2ex] \dfrac{dy}{d\theta}=\dfrac{xy}{x+y}\left(\operatorname{tang}\theta-\dfrac{c}{b\cos\theta}\right), \end{cases}$$

qui définissent x et y en fonction de θ.

Ces équations étant supposées intégrées, la relation entre θ et t est donnée par l'équation

$$\frac{dy}{dt}-\frac{dx}{dt}=a-c.$$

$$y-x=(a-c)t+y_0-x_0;$$

on a ensuite

$$d\alpha=-\frac{b\cos\theta}{x}\,dt,$$

d'où α par une quadrature.

Enfin

$$\beta-\alpha=\theta.$$

Il s'agit donc d'intégrer les deux équations (14).

10. *Cas particulier.* — En se plaçant au point de vue purement analytique, on a une intégration immédiate, si $a=c$. Posons alors $\frac{a}{b}=h$. Nous avons l'intégrale

$$y-x=\mathrm{A},$$

où A est une constante. La première équation s'écrit, en remplaçant y par $x+\mathrm{A}$,

$$\frac{2x+\mathrm{A}}{x(x+\mathrm{A})}\,dx=\left(\operatorname{tang}\theta-\frac{h}{\cos\theta}\right)d\theta,$$

d'où

$$x(x+\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{C}}{\cos\theta\left[\operatorname{tang}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]^{h}}.$$

On a ainsi $y-x$ et yx, et l'on peut calculer x et y en fonction de θ.

11. *Réduction à l'intégration d'une équation d'un type connu.* — Faisons d'abord le changement de variable

$$d\varphi = \left(\operatorname{tang}\theta - \frac{a}{b\cos\theta}\right)d\theta.$$

Les équations prennent la forme

$$x' = \frac{xy}{x+y}, \qquad y' = \frac{xy}{x+y}\lambda,$$

où λ peut être considéré comme une fonction connue de φ et où x' et y' désignent des dérivées *par rapport* à φ. On en déduit

$$y' = \lambda x', \qquad y = \frac{xx'}{x-x'}.$$

Éliminant y, on a

$$x^2 x'' = x'^3 + \lambda x'(x-x')^2.$$

Posant enfin

$$x = e^{\int z\,d\varphi},$$

z désignant une nouvelle fonction de φ, on a l'équation

$$z' = z^3 - z^2 + \lambda z(1-z)^2.$$

Cette équation rentre dans un type étudié d'abord par M. Roger Liouville, auquel j'ai consacré une monographie détaillée dans le Tome V de ce *Journal*, 1889, pages 361-423. On la ramènera aisément à la forme normale indiquée dans cette étude.

Sur les équations du mouvement d'un corps solide;

Par M. E. STUDY.

(Traduit par M. R. Garnier.)

M. Study a introduit, pour définir la position d'un solide, un système de huit coordonnées homogènes liées par une relation quadratique, analogue aux six coordonnées d'une droite d'après Plücker ([1]). M. Appell ayant demandé à M. Study s'il avait calculé l'énergie cinétique T des corps, dans son système, en vue des applications possibles à la Dynamique, a reçu en réponse l'exposé suivant que nous sommes heureux de reproduire.

(*Note de la Rédaction.*)

Nous définirons la position d'un solide mobile par celle d'un trièdre de coordonnées rectangulaires (y), invariablement lié au corps. Soient y_1, y_2, y_3 les coordonnées par rapport à ce trièdre d'un point quelconque du corps, et x_1, x_2, x_3 les coordonnées du même point par rapport à un second trièdre de coordonnées (x), que nous regarderons comme *fixe*, et qui est orienté comme le premier trièdre. Le passage $\{\overrightarrow{xy}\}$ des coordonnées x_i aux coordonnées y_k s'effectuera à l'aide d'une transformation orthogonale *propre* S (c'est-à-dire de déterminant 1), dont nous écrirons les coefficients sous forme de frac-

([1]) *Comptes rendus*, 1910 (Notes de MM. Study et Bricard).

tions avec un dénominateur commun :

$$
(1)\qquad \left\{
\begin{aligned}
a_{00}y_1 &= a_{10} + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,\\
a_{00}y_2 &= a_{20} + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,\\
a_{00}y_3 &= a_{30} + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3.
\end{aligned}\right.
$$

Les coefficients de la transformation inverse S^{-1}, qui effectue le passage $\left\{\overrightarrow{yx}\right\}$ des coordonnées y_k aux coordonnées x_i, seront désignés, en conséquence, de la façon suivante :

$$
(2)\qquad \left\{
\begin{aligned}
a_{00}x_1 &= a_{01} + a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3,\\
a_{00}x_2 &= a_{02} + a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3,\\
a_{00}x_3 &= a_{03} + a_{13}y_1 + a_{23}y_3 + a_{33}y_3.
\end{aligned}\right.
$$

Les seize coefficients homogènes a_{ik} ($i, k = 0, 1, 2, 3$) sont liés d'ailleurs par certaines équations algébriques qu'on vérifiera toutes identiquement en choisissant huit paramètres liés par la relation

$$
(3)\qquad \alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0,
$$

et en calculant à l'aide de ces paramètres les seize coefficients a_{ik} par les formules suivantes :

$$
(4)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&a_{00} = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2,\\
&a_{11} = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2,\\
&a_{22} = \alpha_0^2 - \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2,\\
&a_{33} = \alpha_0^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \alpha_3^2,\\
&a_{23} = 2(\alpha_2\alpha_3 + \alpha_0\alpha_1), \qquad a_{32} = 2(\alpha_2\alpha_3 - \alpha_0\alpha_1),\\
&a_{31} = 2(\alpha_3\alpha_1 + \alpha_0\alpha_2), \qquad a_{13} = 2(\alpha_3\alpha_1 - \alpha_0\alpha_2),\\
&a_{12} = 2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_0\alpha_3), \qquad a_{21} = 2(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_0\alpha_3);
\end{aligned}\right.
$$

$$
(5)\qquad \left\{
\begin{aligned}
a_{10} &= 2(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 - \alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0),\\
a_{20} &= 2(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 - \alpha_0\beta_2 + \alpha_2\beta_0),\\
a_{30} &= 2(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 - \alpha_0\beta_3 + \alpha_3\beta_0),\\
a_{01} &= 2(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 + \alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0),\\
a_{02} &= 2(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 + \alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0),\\
a_{03} &= 2(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 + \alpha_0\beta_3 - \alpha_3\beta_0).
\end{aligned}\right.
$$

De plus, les mêmes paramètres (α, β) permettent d'exprimer d'une façon tout à fait semblable les formules de transformation analogues à (1) et (2) pour les coordonnées de droites et les coordonnées tangentielles. Désignons par ξ_1, ξ_2, ξ_3 les projections d'un vecteur sur les axes fixes (x), et par η_1, η_2 η_3 les projections du même vecteur sur les axes (y); il vient alors, d'après (1) et (2),

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} a_{00}\eta_k &= a_{k1}\xi_1 + a_{k2}\xi_2 + a_{k3}\xi_3 \\ a_{00}\xi_k &= a_{1k}\eta_1 + a_{2k}\eta_2 + a_{3k}\eta_3 \end{aligned}\right. \qquad (k = 1, 2, 3).$$

et si l'on pose, en outre,

$$\begin{array}{llll} P_{01} = \xi_1, & P_{23} = x_2\xi_3 - x_3\xi_2; & Q_{01} = \eta_1, & Q_{23} = y_2\eta_3 - y_3\eta_2; \\ P_{02} = \xi_2, & P_{31} = x_3\xi_1 - x_1\xi_3; & Q_{02} = \eta_2, & Q_{31} = y_3\eta_1 - y_1\eta_3; \\ P_{03} = \xi_3, & P_{12} = x_1\xi_2 - x_2\xi_1; & Q_{03} = \eta_3, & Q_{12} = y_1\eta_2 - y_2\eta_1; \end{array}$$

il en résultera :

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} a_{00}Q_{01} &= a_{11}P_{01} + a_{12}P_{02} + a_{13}P_{03}, \\ a_{00}Q_{23} &= a_{11}P_{23} + a_{12}P_{31} + a_{13}P_{12} + b_{11}P_{01} + b_{12}P_{02} + b_{13}P_{03}; \end{aligned}\right.$$

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} a_{00}P_{01} &= a_{11}Q_{01} + a_{21}Q_{02} + a_{31}Q_{03}, \\ a_{00}P_{23} &= a_{11}Q_{23} + a_{21}Q_{31} + a_{31}Q_{12} + b_{11}Q_{01} + b_{21}Q_{02} + b_{31}Q_{03}; \end{aligned}\right.$$

. . . .

Dans ces formules les coefficients b_{ik} ont les valeurs suivantes :

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} b_{11} &= 2(\alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3), \\ b_{23} &= 2(\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2 + \alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0), \\ b_{32} &= 2(\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2 - \alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0); \end{aligned}\right.$$

. . . .

Enfin, nous obtenons pour la transformation des coordonnées tangentielles u_i et v_k, associées respectivement aux systèmes (x) et (y), les équations suivantes :

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} a_{00}v_0 &= a_{00}u_0 + a_{01}u_1 + a_{02}u_2 + a_{03}u_3, \\ a_{00}v_k &= \quad\star \qquad a_{k1}u_1 + a_{k2}u_2 + a_{k3}u_3. \end{aligned}\right.$$

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} a_{00}u_0 &= a_{00}v_0 + a_{10}v_1 + a_{20}v_2 + a_{30}v_3, \\ a_{00}u_k &= \quad\star \qquad a_{1k}v_1 + a_{2k}v_2 + a_{3k}v_3 \end{aligned}\right.$$

$$(k = 1, 2, 3).$$

Les formules (4) renferment les expressions classiques découvertes par Euler. Naturellement on devra supposer que a_{00} est différent de zéro : autrement dit, si nous nous limitons aux domaines réels, les paramètres α_0, α_1, α_2, α_3 ne peuvent tous être nuls. On voit de plus que les équations (4), (3) et (5) donnent toujours, pour les rapports des huit paramètres (α, β), une solution et *une seule*; en outre, pour passer de la transformation S à son inverse S^{-1}, il suffit de remplacer respectivement les huit quantités

$$\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \beta_0 : \beta_1 : \beta_2 : \beta_3$$

par les huit quantités

$$\alpha_0 : -\alpha_1 : -\alpha_2 : -\alpha_3 : \beta_0 : -\beta_1 : -\beta_2 : -\beta_3.$$

Enfin, l'emploi des paramètres (α, β) permet d'effectuer d'une façon très simple la composition des transformations orthogonales. Soit, en effet, $S(\alpha, \beta)$ la transformation qui fait passer du système de coordonnées (x) au système (y), et, de même, $S'(\alpha', \beta')$ la transformation qui change (y) en un troisième système (z) : le passage de (x) à (z) s'effectuera au moyen d'une transformation orthogonale S'' appelée, comme on sait, le produit des deux premières : $S'' = SS'$. Or les paramètres (α'', β'') de cette transformation composée se laissent exprimer par les formules suivantes :

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\alpha_0\alpha'_0 - \alpha_1\alpha'_1 - \alpha_2\alpha'_2 - \alpha_3\alpha'_3 = \alpha''_0,\\ &\alpha_0\alpha'_1 + \alpha_1\alpha'_0 + \alpha_2\alpha'_3 - \alpha_3\alpha'_2 = \alpha''_1,\\ &\alpha_0\alpha'_2 + \alpha_2\alpha'_0 + \alpha_3\alpha'_1 - \alpha_1\alpha'_3 = \alpha''_2,\\ &\alpha_0\alpha'_3 + \alpha_3\alpha'_0 + \alpha_1\alpha'_2 - \alpha_2\alpha'_1 = \alpha''_3; \end{aligned}\right.$$

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &\alpha_0\beta'_0 - \alpha_1\beta'_1 - \alpha_2\beta'_2 - \alpha_3\beta'_3 + \beta_0\alpha'_0 - \beta_1\alpha'_1 - \beta_2\alpha'_2 - \beta_3\alpha'_3 = \beta''_0,\\ &\alpha_0\beta'_1 + \alpha_1\beta'_0 + \alpha_2\beta'_3 - \alpha_3\beta'_2 + \beta_0\alpha'_1 + \beta_1\alpha'_0 + \beta_2\alpha'_3 - \beta_3\alpha'_2 = \beta''_1,\\ &\alpha_0\beta'_2 + \alpha_2\beta'_0 + \alpha_3\beta'_1 - \alpha_1\beta'_3 + \beta_0\alpha'_2 + \beta_2\alpha'_0 + \beta_3\alpha'_1 - \beta_1\alpha'_3 = \beta''_2,\\ &\alpha_0\beta'_3 + \alpha_3\beta'_0 + \alpha_1\beta'_2 - \alpha_2\beta'_1 + \beta_0\alpha'_3 + \beta_3\alpha'_0 + \beta_1\alpha'_2 - \beta_2\alpha'_1 = \beta''_3. \end{aligned}\right.$$

Les formules (12), déjà connues de Gauss, ont été retrouvées plus tard, indépendamment (autant que nous le sachions), par Cayley et Hamilton. Elles sont connues sous le nom de *théorème de multiplication des quaternions*. De même, l'ensemble des formules (12) et (13) exprime le théorème de multiplication d'un système de grandeurs complexes : c'est un des systèmes considérés d'abord par Clifford sous le nom de *biquaternions*.

Relativement à la théorie des paramètres (α, β), nous renvoyons à un Mémoire des *Mathematische Annalen* (t. XXIX, 1891) et au Traité : *Geometrie der Dynamen* (Leipzig, 1903), où l'on trouvera des applications à la Cinématique.

Supposons maintenant que les paramètres (α, β) soient des fonctions données d'une variable t que nous regarderons comme la *mesure du temps*, ces fonctions étant d'ailleurs continues et possédant des dérivées des deux premiers ordres au moins. Le corps solide (y) se meut alors de telle sorte que pendant l'élément de temps dt le point y passe de la position x qu'il occupait en l'instant t à la position voisine $x + dx$. La transformation infinitésimale correspondante est manifestement

$$\Sigma = S(S + dS)^{-1},$$

où le symbole $S + dS$ désigne la transformation $S(t + dt)$ correspondant à l'argument $t + dt$. Comme y se déduit de x à l'aide de S, la *même* transformation infinitésimale, rapportée au système de coordonnées correspondant à la situation du trièdre y en l'instant t, sera donnée par

$$S^{-1}\Sigma S = (S + dS)^{-1}S.$$

Ce déplacement infinitésimal permet d'obtenir les coordonnées du point $x + dx$ dans le système de coordonnées (y) *qui correspond à l'instant* t. On peut le calculer suivant la règle donnée précédemment [formules (12), (13)]. Il est d'ailleurs loisible de négliger les termes qui sont, par rapport à dt, d'ordre supérieur à 1; on obtient ainsi pour les paramètres respectifs de $(S + dS)^{-1}S$ des expressions de la forme

$$(14)\qquad 1 + \frac{1}{2}\frac{N'}{N}dt : -\frac{1}{2}\Delta_{01}\,dt : -\frac{1}{2}\Delta_{02}\,dt : -\frac{1}{2}\Delta_{03}\,dt$$

$$: 0 : -\frac{1}{2}\Delta_{23}\,dt : -\frac{1}{2}\Delta_{31}\,dt : -\frac{1}{2}\Delta_{12}\,dt.$$

où l'on a posé pour abréger :

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} N &= \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \;(= a_{00}), \\ N\Delta_{01} &= -2(\alpha_2\alpha_3 - \alpha_3\alpha_2 - \alpha_0\alpha_1 + \alpha_1\alpha_0), \\ N\Delta_{23} &= -2(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 - \alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 - \beta_2\alpha_3 + \beta_3\alpha_2 + \beta_0\alpha_1 - \beta_1\alpha_0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

et où, bien entendu, α'_0, par exemple, désigne $\frac{d\alpha_0}{dt}$. L'introduction des valeurs (14) dans les formules (1) donne finalement la transformation infinitésimale cherchée. Nous obtenons ainsi les formules ci-dessous, où nous avons désigné par δt et δy_k les accroissements de t et de y_k :

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta y_1 &= \{\Delta_{23} \quad \star \quad - \Delta_{03}\, y_2 + \Delta_{02}\, y_3\}\, \delta t, \\ \delta y_2 &= \{\Delta_{31} + \Delta_{03}\, y_1 \quad \star \quad - \Delta_{01}\, y_3\}\, \delta t, \\ \delta y_3 &= \{\Delta_{12} - \Delta_{02}\, y_1 + \Delta_{01}\, y_2 \quad \star \quad\}\, \delta t. \end{aligned}\right.$$

Ce sont là des équations connues, abstraction faite des notations (¹); le seul point nouveau réside dans les expressions (15) des six coefficients Δ_{ik} par les paramètres (α, β).

Par un procédé classique nous allons déduire des équations (16) les conséquences suivantes :

Remarquons d'abord que pour obtenir le *mouvement (relatif) apparent du système fixe* (x) pendant l'élément de temps $dt = \delta t$, tel que se le représente un observateur lié au corps mobile, il suffit d'effectuer le mouvement infinitésimal *inverse* de (16). Les coordonnées, dans le système mobile (y), du vecteur qui représente la vitesse apparente d'un point fixe (x), ont alors les valeurs suivantes (où $\overline{y}_1$, $\overline{y}_2$, $\overline{y}_3$ désignent les coordonnées de x):

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\overline{y}_1}{dt} &= - \Delta_{23} \quad \star \quad + \Delta_{03}\, \overline{y}_2 - \Delta_{02}\, \overline{y}_3, \\ \frac{d\overline{y}_2}{dt} &= - \Delta_{31} - \Delta_{03}\, \overline{y}_1 \quad \star \quad + \Delta_{01}\, \overline{y}_3, \\ \frac{d\overline{y}_3}{dt} &= - \Delta_{12} + \Delta_{02}\, \overline{y}_1 - \Delta_{01}\, \overline{y}_2 \quad \star \quad . \end{aligned}\right.$$

En particulier, appliquons successivement ces équations aux points

$$(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0),\ (1, 0, 0),\ (0, 1, 0),\ (0, 0, 1),$$

(¹) Les notations classiques sont :

$$u = \Delta_{23}, \quad v = \Delta_{31}, \quad w = \Delta_{12}; \qquad p = \Delta_{01}, \quad q = \Delta_{02}, \quad r = \Delta_{03}.$$

Nous préférons des symboles qui mettent en évidence la loi de formation des ormules.

dont les coordonnées $\overline{y}_k$ se calculent à l'aide des formules (1). Nous obtiendrons ainsi pour les coefficients de la transformation (1) les équations différentielles suivantes :

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{a_{10}}{a_{00}}\right) &= -\Delta_{23} + \Delta_{03}\left(\frac{a_{20}}{a_{00}}\right) - \Delta_{02}\left(\frac{a_{30}}{a_{00}}\right),\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{a_{11}}{a_{00}}\right) &= \quad\star\quad + \Delta_{03}\left(\frac{a_{21}}{a_{00}}\right) - \Delta_{02}\left(\frac{a_{31}}{a_{00}}\right),\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{a_{23}}{a_{00}}\right) &= \quad\star\quad + \Delta_{01}\left(\frac{a_{33}}{a_{00}}\right) - \Delta_{03}\left(\frac{a_{13}}{a_{00}}\right),\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{a_{32}}{a_{00}}\right) &= \quad\star\quad + \Delta_{02}\left(\frac{a_{12}}{a_{00}}\right) - \Delta_{01}\left(\frac{a_{22}}{a_{00}}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

On obtient des équations correspondant à (17) en attribuant des valeurs fixes aux coordonnées de droites P_{ik}, ou à des quantités se comportant comme P_{ik}. Les relations (7) associent alors aux P_{ik} des quantités $\overline{Q}_{ik}$ satisfaisant aux équations suivantes, qui représentent encore le mouvement apparent du système fixe :

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d\overline{Q}_{01}}{dt} &= \Delta_{03}\overline{Q}_{02} - \Delta_{02}\overline{Q}_{03},\\
\frac{d\overline{Q}_{23}}{dt} &= \Delta_{03}\overline{Q}_{31} - \Delta_{02}\overline{Q}_{12} + \Delta_{12}\overline{Q}_{02} - \Delta_{31}\overline{Q}_{03},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

L'application de ces formules aux systèmes particuliers

$$(P_{01}, P_{02}, P_{03}, P_{23}, P_{31}, P_{12}) \quad (1, 0, 0, 0, 0, 0), \ldots$$

donne (¹) les équations différentielles ci-dessous :

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{b_{11}}{a_{00}}\right) &= \Delta_{03}\left(\frac{b_{21}}{a_{00}}\right) - \Delta_{02}\left(\frac{b_{31}}{a_{00}}\right) + \Delta_{12}\left(\frac{a_{21}}{a_{00}}\right) - \Delta_{31}\left(\frac{a_{31}}{a_{00}}\right),\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{b_{23}}{a_{00}}\right) &= \Delta_{01}\left(\frac{b_{33}}{a_{00}}\right) - \Delta_{03}\left(\frac{b_{13}}{a_{00}}\right) + \Delta_{23}\left(\frac{a_{33}}{a_{00}}\right) - \Delta_{12}\left(\frac{a_{13}}{a_{00}}\right),\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{b_{32}}{a_{00}}\right) &= \Delta_{02}\left(\frac{b_{12}}{a_{00}}\right) - \Delta_{01}\left(\frac{b_{22}}{a_{00}}\right) + \Delta_{31}\left(\frac{a_{12}}{a_{00}}\right) - \Delta_{23}\left(\frac{a_{22}}{a_{00}}\right).
\end{aligned}\right.$$

(¹) Plus simplement, ces équations se déduisent des trois dernières équations (18) par une sorte de formation polaire. Cf. *Geometrie der Dynamen*, § 23.

Écrivons enfin les formules analogues à (17) et (19) pour les coordonnées tangentielles. Remarquons à cet effet que les équations (1) et (10) entraînent l'identité

$$v_0 + v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3 = u_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3.$$

Exprimons que le premier membre conserve la même valeur après le déplacement infinitésimal pour lequel les composantes de la vitesse ont les expressions (17) ; nous obtenons ainsi les équations suivantes, analogues à (17) et (19) :

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\bar{v}_0}{dt} &= \Delta_{23}\bar{v}_1 + \Delta_{31}\bar{v}_2 + \Delta_{12}\bar{v}_3,\\ \frac{d\bar{v}_1}{dt} &= \quad\star\quad + \Delta_{03}\bar{v}_2 - \Delta_{02}\bar{v}_3,\\ \frac{d\bar{v}_2}{dt} &= -\Delta_{03}\bar{v}_1 \quad\star\quad + \Delta_{01}\bar{v}_3,\\ \frac{d\bar{v}_3}{dt} &= \Delta_{02}\bar{v}_1 - \Delta_{01}\bar{v}_2 \quad\star\quad. \end{aligned}\right.$$

Appliquées aux cas particuliers $(u_0, u_1, u_2, u_3) = (1, 1, 0, 0)$, ... ces formules donnent enfin les équations différentielles

$$(22)\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{a_{0k}}{a_{00}}\right) = \Delta_{23}\left(\frac{a_{1k}}{a_{00}}\right) + \Delta_{31}\left(\frac{a_{2k}}{a_{00}}\right) + \Delta_{12}\left(\frac{a_{3k}}{a_{00}}\right) \qquad (k = 1, 2, 3),$$

qui complètent le système des équations (18) et (20).

Dans toutes ces formules relatives à la *Cinématique pure*, nous avons indiqué, en surmontant d'un trait les lettres y, Q, v, que les figures auxquelles elles se rapportent doivent être considérées comme appartenant à l'espace *fixe*. Il s'agit donc ainsi du mouvement apparent dont croit être témoin un observateur lié invariablement au trièdre mobile.

Les formules (18), (20), (22), dont la vérification à l'aide de simples différentiations serait un peu laborieuse, sont très utiles dans l'application des paramètres (α, β) à la Mécanique. Pour ne pas allonger ce travail nous considérerons seulement le cas le plus simple, celui d'un solide libre, et, là encore, nous nous bornerons à la formation des équations différentielles vérifiées par les paramètres (α, β) et qui définissent le mouvement du corps. Ainsi, nous n'aborderons pas la théorie de l'intégration de ces équations.

Nous regarderons le solide à étudier comme formé d'un nombre fini de points matériels isolés, ce qui n'implique, comme on sait, aucune restriction dans l'énoncé des problèmes de la Dynamique. Soient m_h la masse du point y_h, $\xi_h = x'_h$ le vecteur qui représente en grandeur et en direction la vitesse instantanée de ce point, et $\xi_{kh} = x'_{kh}$ ses coordonnées dans le système fixe (x); appelons η_h le même vecteur rapporté aux axes mobiles, et η_{kh} ses coordonnées dans le système mobile (y). A l'aide des éléments précédents on peut former une *grandeur géométrique* Ξ ou H, définie par six coordonnées, et qui est pour le solide l'analogue de la quantité de mouvement d'un point matériel isolé; on pourrait l'appeler la *quantité de mouvement du solide* (¹) :

$$\begin{array}{ll} \Xi_{01} = \Sigma m_h \xi_{1h}, & \Xi_{23} = \Sigma m_h (x_{2h}\xi_{3h} - x_{3h}\xi_{2h}), \\ \mathrm{H}_{01} = \Sigma m_h \eta_{1h}, & \mathrm{H}_{23} = \Sigma m_h (y_{2h}\eta_{3h} - y_{3h}\eta_{2h}), \\ \dots\dots & \dots\dots \end{array}$$

$$\left(\xi_{kh} = x'_{kh} = \frac{dx_{kh}}{dt}\right).$$

Les deux systèmes de composantes Ξ_{ik}, H_{ik} de la quantité de mouvement se déduisent l'un de l'autre par des substitutions linéaires identiques à celles que nous avons établies précédemment entre les coordonnées de droites P_{ik} et Q_{ik}. Mais, d'après (16), les vecteurs η_h représentant les vitesses satisfont aux équations

$$\eta_{1h} = \Delta_{23} - \Delta_{03} y_{2h} + \Delta_{02} y_{3h}, \quad \dots;$$

en posant, pour abréger,

$$\mathrm{M} = \Sigma m_h, \qquad \mathrm{M}_k = \Sigma m_h y_{kh}, \qquad \mathrm{M}_{ik} = \Sigma m_h y_{ih} y_{kh},$$

on aura donc les équations

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{H}_{01} = \mathrm{M}\Delta_{23} - \mathrm{M}_2\Delta_{03} + \mathrm{M}_3\Delta_{02}, \\ \mathrm{H}_{23} = \mathrm{M}_2\Delta_{12} - \mathrm{M}_{12}\Delta_{02} + \mathrm{M}_{22}\Delta_{01} - \mathrm{M}_3\Delta_{31} + \mathrm{M}_{33}\Delta_{01} - \mathrm{M}_{13}\Delta_{03}, \\ \dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

(¹) En allemand, *Impuls*.

De plus, on obtient pour l'expression de l'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}\sum m_h(\dot{x}^2_{1h} + \dot{x}^2_{2h} + \dot{x}^2_{3h}) = \frac{1}{2}\sum m_h(\dot{y}^2_{1h} + \dot{y}^2_{2h} + \dot{y}^2_{3h})$$

du corps mobile ou, plus exactement, pour 2T, la formule suivante :

$$(24)\qquad \begin{aligned} 2T = {} & M(\Delta^2_{23} + \Delta^2_{31} + \Delta^2_{12}) \\ & - 2M_1(\Delta_{02}\Delta_{12} - \Delta_{03}\Delta_{31}) - 2M_2(\Delta_{03}\Delta_{23} - \Delta_{01}\Delta_{12}) \\ & - 2M_3(\Delta_{01}\Delta_{31} - \Delta_{02}\Delta_{23}) + (M_{22} + M_{33})\Delta^2_{01} \\ & + (M_{33} + M_{11})\Delta^2_{02} + (M_{11} + M_{22})\Delta^2_{03} \\ & + 2M_{23}\Delta_{02}\Delta_{03} + 2M_{31}\Delta_{03}\Delta_{01} + 2M_{12}\Delta_{01}\Delta_{02} ; \end{aligned}$$

on peut donc poser

$$H_{01} = \frac{\partial T}{\partial \Delta_{23}}, \qquad H_{02} = \frac{\partial T}{\partial \Delta_{31}}, \qquad H_{03} = \frac{\partial T}{\partial \Delta_{12}},$$

$$H_{23} = \frac{\partial T}{\partial \Delta_{01}}, \qquad H_{31} = \frac{\partial T}{\partial \Delta_{02}}, \qquad H_{12} = \frac{\partial T}{\partial \Delta_{03}},$$

avec

$$(25)\qquad T = \frac{1}{2}\{\Delta_{01}H_{23} + \Delta_{02}H_{31} + \Delta_{03}H_{12} + \Delta_{23}H_{01} + \Delta_{31}H_{02} + \Delta_{12}H_{03}\}.$$

Dans les formules précédentes les quantités Δ_{ik} sont supposées exprimées à l'aide des relations (15) en fonction des paramètres (α, β) et de leurs dérivées premières par rapport à t.

Supposons maintenant que les points x_h ou y_h soient soumis à des forces dont les composantes soient X_h par rapport aux axes fixes et Y_h par rapport aux axes mobiles. A l'aide de ces quantités on peut former dans chaque système d'axes les coordonnées d'une *dyname* X ou Y :

$$X_{01} = \sum X_{1h}, \qquad X_{23} = \sum (x_{2h}X_{3h} - x_{3h}X_{2h}),$$

$$Y_{01} = \sum Y_{1h}, \qquad Y_{23} = \sum (y_{2h}Y_{3h} - y_{3h}Y_{2h});$$

et, entre ces deux systèmes de coordonnées, nous retrouvons les mêmes relations (7) et (8) qu'entre les P_{ik} et les Q_{ik}.

Cela étant, pendant le mouvement d'un solide soumis à l'action de la dyname X, les équations suivantes sont vérifiées :

$$(26)\qquad \frac{d\Xi_{ik}}{dt} = X_{ik} \qquad \{ik = 01, 02, 03, 23, 31, 12\};$$

réciproquement, on sait — et il en résulte de la suite de ce travail — que ces équations définissent complètement le mouvement. Passons alors du trièdre fixe au trièdre mobile ; les équations (26) se transformeront en les suivantes :

$$
(27)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{dH_{01}}{dt} - \Delta_{03}H_{02} + \Delta_{02}H_{03} = \Xi_{01},\\
&\frac{dH_{23}}{dt} - \Delta_{03}H_{31} + \Delta_{02}H_{12} - \Delta_{12}H_{02} + \Delta_{31}H_{03} = \Xi_{23},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\right.
$$

Remplaçons dans (27) les quantités H_{ik} par leurs valeurs extraites de (23), et nous obtiendrons un système de six équations différentielles du premier ordre où les seules inconnues sont les paramètres (α, β). Par exemple, en choisissant convenablement le trièdre de coordonnées (y), de façon à annuler M_1, M_2, M_3, M_{23}, M_{31}, M_{12}, on retrouve les équations d'Euler :

$$
(28)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&M\left\{\frac{d\Delta_{23}}{dt} + \Delta_{02}\Delta_{12} - \Delta_{03}\Delta_{31}\right\} = \Xi_{01},\\
&(M_{22}+M_{33})\frac{d\Delta_{01}}{dt} + (M_{22}-M_{33})\Delta_{02}\Delta_{03} = \Xi_{23},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\right.
$$

D'autre part, on peut transformer les équations (26) tout en les laissant résolues par rapport aux coordonnées des dynames Ξ_{ik} ; il vient alors, d'après (8),

$$
\begin{aligned}
&a_{00}\,\Xi_{01} = a_{11}H_{01} + a_{21}H_{02} + a_{31}H_{03},\\
&a_{00}\,\Xi_{23} = a_{11}H_{23} + a_{21}H_{31} + a_{31}H_{12} + b_{11}H_{01} + b_{21}H_{02} + b_{31}H_{03};
\end{aligned}
$$

servons-nous encore des équations (23) pour exprimer les seconds membres de ces équations en fonction des Δ_{ik} ; nous obtiendrons ainsi :

$$
(29)\quad \Xi_{0k} = \frac{d}{dt}\left\{M\left(\frac{a_{0k}}{a_{00}}\right) + M_1\left(\frac{a_{1k}}{a_{00}}\right) + M_2\left(\frac{a_{2k}}{a_{00}}\right) + M_3\left(\frac{a_{3k}}{a_{00}}\right)\right\} \qquad (k = 1, 2, 3),
$$

et, dans l'hypothèse $M_1 = M_2 = M_3 = 0$, $M_{23} = M_{31} = M_{12} = 0$, le système des équations du mouvement prend la forme

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned}
&M\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{a_{01}}{a_{00}}\right)=\Lambda_{01},\qquad M\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{a_{02}}{a_{00}}\right)=\Lambda_{02},\qquad M\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{a_{03}}{a_{00}}\right)=\Lambda_{03},\\
&(M_{22}+M_{33})\frac{d}{dt}\left(\frac{a_{11}\Delta_{01}}{a_{00}}\right)+(M_{33}+M_{11})\frac{d}{dt}\left(\frac{a_{11}\Delta_{02}}{a_{00}}\right)\\
&\quad+(M_{11}+M_{22})\frac{d}{dt}\left(\frac{a_{31}\Delta_{03}}{a_{00}}\right)+M\frac{d}{dt}\left\{\frac{b_{11}\Delta_{23}-b_{31}\Delta_{31}+b_{31}\Delta_{12}}{a_{00}}\right\}=\Lambda_{23},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

Les équations différentielles du mouvement vont s'écrire différemment si l'on se sert de la forme découverte par Lagrange; on aura alors

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{z}'_k}\right)-\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{z}_k}=\mathfrak{A}_k+N\mathfrak{x}_k\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{x}'_k}\right)-\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{x}_k}=\mathfrak{B}_k+N\mathfrak{z}_k
\end{aligned}\right.\qquad (k=0,1,2,3)$$

avec

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned}
N\mathfrak{A}_0&=2\{-\mathfrak{x}_1\Lambda_{01}-\mathfrak{x}_2\Lambda_{02}-\mathfrak{x}_3\Lambda_{03}\},\\
N\mathfrak{A}_1&=2\{\mathfrak{x}_0\Lambda_{01}+\mathfrak{x}_3\Lambda_{02}-\mathfrak{x}_2\Lambda_{03}\},\\
N\mathfrak{A}_2&=2\{-\mathfrak{x}_3\Lambda_{01}+\mathfrak{x}_0\Lambda_{02}+\mathfrak{x}_1\Lambda_{03}\},\\
N\mathfrak{A}_3&=2\{\mathfrak{x}_2\Lambda_{01}-\mathfrak{x}_1\Lambda_{02}+\mathfrak{x}_0\Lambda_{03}\},\\
N\mathfrak{B}_0&=2\{-\mathfrak{z}_1\Lambda_{01}-\mathfrak{z}_2\Lambda_{02}-\mathfrak{z}_3\Lambda_{03}-\mathfrak{x}_1\Lambda_{23}-\mathfrak{x}_2\Lambda_{31}-\mathfrak{x}_3\Lambda_{12}\},\\
N\mathfrak{B}_1&=2\{\mathfrak{z}_0\Lambda_{01}+\mathfrak{z}_3\Lambda_{02}-\mathfrak{z}_2\Lambda_{03}+\mathfrak{x}_0\Lambda_{23}+\mathfrak{x}_3\Lambda_{31}-\mathfrak{x}_2\Lambda_{12}\},\\
N\mathfrak{B}_2&=2\{-\mathfrak{z}_3\Lambda_{01}+\mathfrak{z}_0\Lambda_{02}+\mathfrak{z}_1\Lambda_{03}-\mathfrak{x}_3\Lambda_{23}+\mathfrak{x}_0\Lambda_{31}+\mathfrak{x}_1\Lambda_{12}\},\\
N\mathfrak{B}_3&=2\{\mathfrak{z}_2\Lambda_{01}-\mathfrak{z}_1\Lambda_{02}+\mathfrak{z}_0\Lambda_{03}+\mathfrak{x}_2\Lambda_{23}-\mathfrak{x}_1\Lambda_{31}+\mathfrak{x}_0\Lambda_{12}\}.
\end{aligned}\right.$$

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned}
N\mathfrak{A}_0&=2\{-\mathfrak{x}_1\mathrm{Y}_{01}-\mathfrak{x}_2\mathrm{Y}_{02}-\mathfrak{x}_3\mathrm{Y}_{03}\},\\
N\mathfrak{A}_1&=2\{\mathfrak{x}_0\mathrm{Y}_{01}-\mathfrak{x}_3\mathrm{Y}_{02}+\mathfrak{x}_2\mathrm{Y}_{03}\},\\
N\mathfrak{A}_2&=2\{\mathfrak{x}_3\mathrm{Y}_{01}+\mathfrak{x}_0\mathrm{Y}_{02}-\mathfrak{x}_1\mathrm{Y}_{03}\},\\
N\mathfrak{A}_3&=2\{\mathfrak{x}_2\mathrm{Y}_{01}+\mathfrak{x}_1\mathrm{Y}_{02}+\mathfrak{x}_0\mathrm{Y}_{03}\},\\
N\mathfrak{B}_0&=2\{-\mathfrak{z}_1\mathrm{Y}_{01}-\mathfrak{z}_2\mathrm{Y}_{02}-\mathfrak{z}_3\mathrm{Y}_{03}-\mathfrak{x}_1\mathrm{Y}_{23}-\mathfrak{x}_2\mathrm{Y}_{31}-\mathfrak{x}_3\mathrm{Y}_{12}\},\\
N\mathfrak{B}_1&=2\{\mathfrak{z}_0\mathrm{Y}_{01}-\mathfrak{z}_3\mathrm{Y}_{02}+\mathfrak{z}_2\mathrm{Y}_{03}+\mathfrak{x}_0\mathrm{Y}_{23}-\mathfrak{x}_1\mathrm{Y}_{31}+\mathfrak{x}_2\mathrm{Y}_{12}\},\\
N\mathfrak{B}_2&=2\{\mathfrak{z}_3\mathrm{Y}_{01}+\mathfrak{z}_0\mathrm{Y}_{02}-\mathfrak{z}_1\mathrm{Y}_{03}+\mathfrak{x}_3\mathrm{Y}_{23}+\mathfrak{x}_0\mathrm{Y}_{31}-\mathfrak{x}_1\mathrm{Y}_{12}\},\\
N\mathfrak{B}_3&=2\{\mathfrak{z}_2\mathrm{Y}_{01}+\mathfrak{z}_1\mathrm{Y}_{02}+\mathfrak{z}_0\mathrm{Y}_{03}-\mathfrak{x}_2\mathrm{Y}_{23}+\mathfrak{x}_1\mathrm{Y}_{31}+\mathfrak{x}_0\mathrm{Y}_{12}\}.
\end{aligned}\right.$$

On obtient ces formules en partant des relations

$$\mathfrak{A}_k = \sum_h \left\{ \frac{\partial x_{1h}}{\partial \beta_k} \mathrm{X}_{1h} + \frac{\partial x_{2h}}{\partial \beta_k} \mathrm{X}_{2h} + \frac{\partial x_{3h}}{\partial \beta_k} \mathrm{X}_{3h} \right\},$$

$$\mathfrak{B}_k = \sum_h \left\{ \frac{\partial x_{1h}}{\partial \alpha_k} \mathrm{X}_{1h} + \frac{\partial x_{2h}}{\partial \alpha_k} \mathrm{X}_{2h} + \frac{\partial x_{3h}}{\partial \alpha_k} \mathrm{X}_{3h} \right\},$$

et en tenant compte [1] de (2) et (6).

Réciproquement, on a les relations

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned}
\alpha_0 \mathfrak{A}_0 + \alpha_1 \mathfrak{A}_1 + \alpha_2 \mathfrak{A}_2 + \alpha_3 \mathfrak{A}_3 &= 0,\\
-\alpha_1 \mathfrak{A}_0 + \alpha_0 \mathfrak{A}_1 - \alpha_3 \mathfrak{A}_2 + \alpha_2 \mathfrak{A}_3 &= 2\mathrm{X}_{01},\\
-\alpha_2 \mathfrak{A}_0 + \alpha_3 \mathfrak{A}_1 + \alpha_0 \mathfrak{A}_2 - \alpha_1 \mathfrak{A}_3 &= 2\mathrm{X}_{02},\\
-\alpha_3 \mathfrak{A}_0 - \alpha_2 \mathfrak{A}_1 + \alpha_1 \mathfrak{A}_2 + \alpha_0 \mathfrak{A}_3 &= 2\mathrm{X}_{03},\\
\alpha_0 \mathfrak{B}_0 + \alpha_1 \mathfrak{B}_1 + \alpha_2 \mathfrak{B}_2 + \alpha_3 \mathfrak{B}_3 + \beta_0 \mathfrak{A}_0 + \beta_1 \mathfrak{A}_1 + \beta_2 \mathfrak{A}_2 + \beta_3 \mathfrak{A}_3 &= 0,\\
-\alpha_1 \mathfrak{B}_0 + \alpha_0 \mathfrak{B}_1 - \alpha_3 \mathfrak{B}_2 + \alpha_2 \mathfrak{B}_3 - \beta_1 \mathfrak{A}_0 + \beta_0 \mathfrak{A}_1 - \beta_3 \mathfrak{A}_2 + \beta_2 \mathfrak{A}_3 &= 2\mathrm{X}_{23},\\
-\alpha_2 \mathfrak{B}_0 + \alpha_3 \mathfrak{B}_1 + \alpha_0 \mathfrak{B}_2 - \alpha_1 \mathfrak{B}_3 - \beta_2 \mathfrak{A}_0 + \beta_3 \mathfrak{A}_1 + \beta_0 \mathfrak{A}_2 - \beta_1 \mathfrak{A}_3 &= 2\mathrm{X}_{31},\\
-\alpha_3 \mathfrak{B}_0 - \alpha_2 \mathfrak{B}_1 + \alpha_1 \mathfrak{B}_2 + \alpha_0 \mathfrak{B}_3 - \beta_3 \mathfrak{A}_0 - \beta_2 \mathfrak{A}_1 + \beta_1 \mathfrak{A}_2 + \beta_0 \mathfrak{A}_3 &= 2\mathrm{X}_{12};
\end{aligned}\right.$$

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned}
\alpha_0 \mathfrak{A}_0 + \alpha_1 \mathfrak{A}_1 + \alpha_2 \mathfrak{A}_2 + \alpha_3 \mathfrak{A}_3 &= 0,\\
-\alpha_1 \mathfrak{A}_0 + \alpha_0 \mathfrak{A}_1 + \alpha_3 \mathfrak{A}_2 - \alpha_2 \mathfrak{A}_3 &= 2\mathrm{Y}_{01},\\
-\alpha_2 \mathfrak{A}_0 - \alpha_3 \mathfrak{A}_1 + \alpha_0 \mathfrak{A}_2 + \alpha_1 \mathfrak{A}_3 &= 2\mathrm{Y}_{02},\\
-\alpha_3 \mathfrak{A}_0 + \alpha_2 \mathfrak{A}_1 - \alpha_1 \mathfrak{A}_2 + \alpha_0 \mathfrak{A}_3 &= 2\mathrm{Y}_{03},\\
\alpha_0 \mathfrak{B}_0 + \alpha_1 \mathfrak{B}_1 + \alpha_2 \mathfrak{B}_2 + \alpha_3 \mathfrak{B}_3 + \beta_0 \mathfrak{A}_0 + \beta_1 \mathfrak{A}_1 + \beta_2 \mathfrak{A}_2 + \beta_3 \mathfrak{A}_3 &= 0,\\
-\alpha_1 \mathfrak{B}_0 + \alpha_0 \mathfrak{B}_1 + \alpha_3 \mathfrak{B}_2 - \alpha_2 \mathfrak{B}_3 - \beta_1 \mathfrak{A}_0 + \beta_0 \mathfrak{A}_1 + \beta_3 \mathfrak{A}_2 - \beta_2 \mathfrak{A}_3 &= 2\mathrm{Y}_{23},\\
-\alpha_2 \mathfrak{B}_0 - \alpha_3 \mathfrak{B}_1 + \alpha_0 \mathfrak{B}_2 + \alpha_1 \mathfrak{B}_3 - \beta_2 \mathfrak{A}_0 - \beta_3 \mathfrak{A}_1 + \beta_0 \mathfrak{A}_2 + \beta_1 \mathfrak{A}_3 &= 2\mathrm{Y}_{31},\\
-\alpha_3 \mathfrak{B}_0 + \alpha_2 \mathfrak{B}_1 - \alpha_1 \mathfrak{B}_2 + \alpha_0 \mathfrak{B}_3 - \beta_3 \mathfrak{A}_0 + \beta_2 \mathfrak{A}_1 - \beta_1 \mathfrak{A}_2 + \beta_0 \mathfrak{A}_3 &= 2\mathrm{Y}_{12}.
\end{aligned}\right.$$

Substituons aux $\mathfrak{A}_k$ et $\mathfrak{B}_k$, dans ces équations, leurs valeurs tirées de (31) : nous obtiendrons, en partant de la cinquième équation (34) [ou (35)], une relation linéaire entre les huit expressions (31) :

$$(36)\qquad \sum \alpha_k \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \alpha'_k}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \alpha_k} \right\} + \sum \beta_k \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \beta'_k}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \beta_k} \right\} = 0.$$

---

(1) Ici encore, remarquons que les formules relatives aux $\mathfrak{B}_k$ peuvent se déduire par un procédé d'extension des formules relatives aux $\mathfrak{A}_k$. Cf. *Geometrie der Dynamen*, § 23.

Ceci concorde bien avec le fait que nous nous sommes servis de paramètres homogènes ; en effet, la relation (36) est une conséquence des équations évidentes

$$\sum \left\{ \alpha_k \frac{\partial T}{\partial \alpha_k} + \beta_k \frac{\partial T}{\partial \beta_k} \right\} = -2T, \qquad \sum \left\{ \alpha'_k \frac{\partial T}{\partial \alpha'_k} + \beta'_k \frac{\partial T}{\partial \beta'_k} \right\} = 2T,$$
$$\sum \left\{ \alpha_k \frac{\partial T}{\partial \alpha'_k} + \beta_k \frac{\partial T}{\partial \beta'_k} \right\} = 0.$$

Les autres équations (34) ou (35) reproduisent respectivement les équations (30) ou (27). Enfin, la première des équations (34) ou (35) sert à définir le multiplicateur Λ, qui, d'après (36), dépend *seulement de la quantité de mouvement* (ainsi, il est indépendant de la dyname qui définit la variation de la quantité de mouvement). Or, on a manifestement

$$\sum \alpha_k \frac{\partial T}{\partial \beta'_k} = 0;$$

il en résulte

$$(37) \qquad \sum \alpha_k \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \beta'_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial \beta_k} \right\} = -2M \left\{ \Delta_{01}\Delta_{23} + \Delta_{02}\Delta_{31} + \Delta_{03}\Delta_{12} \right\}.$$

On obtient ainsi

$$(38) \qquad \mathfrak{X}\Lambda = -2M \left\{ \Delta_{01}\Delta_{23} + \Delta_{02}\Delta_{31} + \Delta_{03}\Delta_{12} \right\}.$$

Remarquons enfin les relations suivantes qui peuvent servir :

$$(39) \quad \begin{cases} \mathfrak{X}(\mathfrak{A}_0^2 + \mathfrak{A}_1^2 + \mathfrak{A}_2^2 + \mathfrak{A}_3^2) = \frac{1}{4}(\mathfrak{X}_{01}^2 + \mathfrak{X}_{02}^2 + \mathfrak{X}_{03}^2) = \frac{1}{4}(\mathfrak{Y}_{01}^2 + \mathfrak{Y}_{02}^2 + \mathfrak{Y}_{03}^2), \\ \mathfrak{X}(\mathfrak{A}_0\mathfrak{B}_0 + \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3) \\ \quad = \frac{1}{4}(\mathfrak{X}_{01}\mathfrak{X}_{23} + \mathfrak{X}_{02}\mathfrak{X}_{31} + \mathfrak{X}_{03}\mathfrak{X}_{12}) = \frac{1}{4}(\mathfrak{Y}_{01}\mathfrak{Y}_{23} + \mathfrak{Y}_{02}\mathfrak{Y}_{31} + \mathfrak{Y}_{03}\mathfrak{Y}_{12}), \end{cases}$$

ainsi que *l'expression du travail* mis en jeu pendant l'élément de temps dt :

$$(40) \quad \left\{ \Delta_{01}\mathfrak{Y}_{23} + \Delta_{02}\mathfrak{Y}_{31} + \Delta_{03}\mathfrak{Y}_{12} + \Delta_{23}\mathfrak{Y}_{01} + \Delta_{31}\mathfrak{Y}_{02} + \Delta_{12}\mathfrak{Y}_{03} \right\} dt$$
$$= \left\{ \alpha_0\mathfrak{B}_0 + \alpha'_1\mathfrak{B}_1 + \alpha'_2\mathfrak{B}_2 + \alpha'_3\mathfrak{B}_3 + \beta_0\mathfrak{A}_0 + \beta_1\mathfrak{A}_1 + \beta'_2\mathfrak{A}_2 + \beta'_3\mathfrak{A}_3 \right\} dt.$$

L'introduction des paramètres (α, β) dans la dynamique du corps solide ne doit pas faire espérer un perfectionnement dans la théorie de l'intégration des équations du mouvement : un tel progrès est impossible, comme le montrent les résultats déjà obtenus à l'aide des paramètres d'Euler ou de certaines combinaisons complexes de ces quantités. Mais l'emploi des paramètres (α, β) est bien supérieur à l'application des formules classiques pour mettre en lumière les rapports de la mécanique du corps solide dans l'espace euclidien avec les propositions correspondantes de la mécanique *non euclidienne*. Le choix de nos notations a été fait précisément à ce point de vue. Aussi bien, dans le cas de l'espace non euclidien, ou dans les rotations autour d'un point fixe, dans l'espace à quatre dimensions, il est beaucoup plus avantageux d'introduire les paramètres analogues à (α, β), car alors on ne peut pas profiter des simplifications qui, dans l'espace euclidien, résultent des propriétés du centre de gravité d'un solide. Enfin, même dans le cas de l'espace euclidien, il y aura avantage à employer nos paramètres toutes les fois qu'il s'agira d'interpréter géométriquement les formules ; c'est ce qui arrivera, par exemple, lorsqu'on se servira des quaternions et des biquaternions que nous n'avons pas introduits ici pour rendre notre exposé le plus élémentaire possible.

Notations.

	Coordonnées. Système fixe.	Coordonnées. Système mobile.	Indices
Point..................	x	y	1, 2, 3
Vecteur..................	ξ	η	1, 2, 3
Quantité de mouvement..	Ξ	H	01, 02, 03 23, 31, 12
Dyname..................	Λ	Υ	01, 02, 03 23, 31, 12
Mouvement infinitésimal...	Γ (n'a pas été employée)	Δ	01, 02, 03 23, 31, 12

Correspondance entre les notations de ce travail et celles de M. P. Stäckel (*Encyclopädie der Math. Wissensch.*, t. IV, 6):

x_1	x_2	x_3	Ξ_{01}	Ξ_{02}	Ξ_{03}	Ξ_{23}	Ξ_{31}	Ξ_{12}	Λ_{01}	Λ_{02}	Λ_{03}	Λ_{23}	Λ_{31}	Λ_{12}
ξ	η	ζ	Ξ_1	H_1	Z_1	Λ_1	M_1	N_1	Ξ	H	Z	Λ	M	N
y_1	y_2	y_3	H_{01}	H_{02}	H_{03}	H_{23}	H_{31}	H_{12}	Υ_{01}	Υ_{02}	Υ_{03}	Υ_{23}	Υ_{31}	Υ_{12}
x	y	z	X_1	Y_1	Z_1	L_1	M_1	N_1	X	Y	Z	L	M	N
$\frac{a_{01}}{a_{00}}$	$\frac{a_{02}}{a_{00}}$	$\frac{a_{03}}{a_{00}}$	$\frac{a_{11}}{a_{00}}$	$\frac{a_{21}}{a_{00}}$	$\frac{a_{31}}{a_{00}}$	$\frac{a_{21}}{a_{00}}$	$\frac{a_{22}}{a_{00}}$	$\ldots$ $\frac{a_{33}}{a_{00}}$	Δ_{01}	Δ_{02}	Δ_{03}	Δ_{23}	Δ_{31}	Δ_{12}
ξ^*	η^*	ζ^*	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	$\ldots$ c_3	p	q	r	u	v	w

M	M_1	M_2	M_3	M_{23}	M_{31}	M_{12}	$M_{22}+M_{33}$	$M_{33}+M_{11}$	$M_{11}+M_{22}$
$m.M$	—	—		D	E	F	A	B	C

Sur la représentation linéaire homogène des groupes symétrique et alterné;

Par M. J. de SÉGUIER.

Dans un Mémoire paru ici-même ([1]) sous le même titre, j'ai étudié la structure des figuratifs du groupe symétrique et du groupe alterné de degré n. Peu après, M. Schur publiait dans le *Journal de Crelle*, t. 139, p. 155-250 (1911), un Mémoire plus étendu où certaines de mes assertions relatives aux cas $n = 6, 7$ étaient contredites.

J'ai donc été amené à revoir mes démonstrations relatives à ces cas particuliers, qui demandent un traitement spécial, et j'y ai reconnu certaines inexactitudes que je voudrais rectifier. Je profiterai de l'occasion pour ajouter quelques observations. Les notations seront toujours celles qui ont été indiquées précédemment (*M.*, p. 387 et p. 413) ([2]).

1. Tout figuratif $\mathcal{G}$ du g^t symétrique $(t \geq 4)$ Γ de champ $1, \ldots, t$ a pour équations (*M.*, 25)

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} a^2 = \alpha, \quad b^t = \beta, \quad (ba)^{t-1} = \gamma, \quad (ab^{-1}ab)^3 = \delta, \quad (ab^{-j}ab^j)^2 = \varepsilon \\ \qquad \left(j = 2, \ldots, \tau, \quad \tau \text{ étant le plus grand entier } \leq \frac{t}{2}\right), \\ \alpha = \varepsilon^x, \quad \beta = \varepsilon^{\frac{t(t-1)}{2}x + \frac{\tau(\tau-1)}{2} + ty}, \quad \gamma = \beta\varepsilon^y, \quad \delta = \varepsilon^{x+t+1} \quad (x = 0, 1), \\ \qquad \varepsilon^2 = 1, \quad a^{-1}\varepsilon a = b^{-1}\varepsilon b = \varepsilon, \end{array}\right.$$

la détermination de y n'influant pas sur $\mathcal{G}$.

([1]) *J. M.*, 1910, p. 387-436. Je renverrai à ce Mémoire par la lettre *M.*

([2]) Il faut lire L $(2, \pi)$ au lieu de Γ $(2, \pi)$ à la ligne 3 du n° 26.

Les transpositions de Γ sont toutes conjuguées, et à chacune d'elles répondent deux éléments de $\mathcal{G}$ ayant pour carré $a^2 = \alpha$. Or, si $t \neq 6$, le système des transpositions de Γ est caractéristique, c'est-à-dire que tout automorphisme de Γ transforme ce système en lui-même (Hölder, *M. A.*, t. XLVI, p. 345). Il est clair alors que les deux déterminations de $\mathcal{G}$ répondant à $x = 0, 1$ sont distinctes.

Mais si $t = 6$, on ne peut rien conclure, parce que Γ a alors des automorphismes contragrédients qui transforment ses transpositions en s_2^6 auxquelles répondent dans $\mathcal{G}$ les conjugués des deux éléments de $a \,.\, b^{-2}ab^2 \,.\, b^{-4}ab^4 \,\{\varepsilon\}$ (Hölder, *loc. cit.*, p. 339). Or, en supposant $x = 1$ (donc $\beta = 1$), l'un quelconque d'entre eux, tel que $ab^{-2}ab^{-2}ab^{-2}$ a pour carré $(ab^{-2}a)\, b^{-2}\, (ab^{-2}a)\, b^{-2}\, (ab^{-2}a)\, b^{-2} = 1$. Les deux figuratifs sont donc isomorphes (*Cf.* Schur, *Cr.*, t. 139, p. 165).

On peut le voir d'une autre manière qui présente un intérêt particulier. Considérons le groupe $\mathrm{J} = \{\mathrm{U}(2, 9), |\xi^3, \eta^3| = \sigma\}$ d'ordre 2.720. Les substitutions

$$(2) \qquad a = \sigma \begin{vmatrix} \xi \\ i^2\xi + \eta \end{vmatrix}, \qquad b = \sigma \begin{vmatrix} i^2\xi + i^2\eta \\ i^2\xi \end{vmatrix}, \qquad \varepsilon = \begin{vmatrix} -\xi \\ -\eta \end{vmatrix},$$

où i est une racine primitive de C_9 annulant $i^2 + i - 1$, vérifient les équations (1) *pour* $x = 0$ et engendrent J (dont les facteurs de composition sont 2, 360, 2). Les substitutions

$$(3) \qquad a' = \sigma \begin{vmatrix} i^2\xi - \eta \\ -\xi + i^2\eta \end{vmatrix}, \qquad b' = \sigma \begin{vmatrix} i^3(\xi - \eta) \\ i^3\xi + \eta \end{vmatrix}, \qquad \varepsilon = \begin{vmatrix} -\xi \\ -\eta \end{vmatrix},$$

vérifient les équations (1) (où l'on remplace a par a' et b par b') *pour* $x = 1$ et engendrent J. *Donc* J *est l'unique figuratif de* Γ.

2. Voici comment l'on est conduit aux formules (2) et (3). On sait que le g_{1440} $\{\mathfrak{V}(2, 9), i\zeta, \zeta^3\}$ contient trois g_{720} non isomorphes $\mathfrak{g} = \{\mathfrak{V}, i\zeta\}$, $\mathfrak{g}' = \{\mathfrak{V}, \zeta^3\}$ isomorphe à Γ et $\mathfrak{g}'' = \{\mathfrak{V}, i\zeta^3\}$ (Hölder, *loc. cit.*, p. 343). Écrivons $a, b, c, d, e, f, g, h, k, l$ respectivement pour $1, i, i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, i^7, 0, \infty$. $\mathfrak{g}'$ représente le groupe des substitutions opérées sur les 10 g_9 $\{123, 456\}$, $\{124, 356\}$, $\{125, 346\}$, $\{126, 345\}$, $\{134, 256\}$, $\{135, 246\}$, $\{136, 245\}$, $\{145, 236\}$, $\{146, 235\}$, $\{156, 234\}$ de Γ quand on les transforme par Γ, et l'on voit, en les désignant respectivement par o, i^2, i^7, i, i^6, i^5, i^3, i^4, i^8, ∞, ou par k, c, h, b, g, f, d, e, a, l (alors $i\zeta = abcdefgh = \varphi$), que (¹)

$a = 12$	correspond à	$af.de.gl = (\zeta^3)\left(\dfrac{\zeta}{i^2\zeta+1}\right)$,
$b = 123456$	à	$ahegdc.bkl = (\zeta^3)\left(\dfrac{i\zeta+1}{\zeta}\right)$,
$i^2\zeta = \varphi^2 = aceg.bdfh$	à	14.2536,
$\zeta + i = \chi = ahc.bfk.deg$	à	156.234,
$-\zeta^{-1} = \psi = ae.bd.fh.kl$	à	14.56,
$\zeta^3 = \omega = bd.cg.fh$	à	23.

Or φ transforme

φ^2	en	φ^2,
χ	en	$adb.cgk.efh = \chi\varphi^2\chi\varphi^{-2}$,
ψ	en	$ag.bf.ce.kl = \psi\varphi^2$,
ω	en	$ag.ce.dh = \omega\varphi^{-2}$,

et comme $b = \psi\chi\upsilon$ [en posant $\upsilon = (\varphi^2\chi)^{-1}\omega\varphi^2\chi$ et en désignant par la même lettre les substitutions correspondantes de Γ et de $\mathfrak{g}'$] $a = b\omega b^{-1}$, l'automorphisme correspondant de Γ change b en 134.56 et a en 15.26.34. Or 15.26.34 est transformé en 12.34.56 par

$$25 = ab^{-4}ab^4.\upsilon.ab^{-4}ab^4 = bl.ce.fk = (\zeta^3)\left(\frac{i\zeta-1}{\zeta-i^3}\right) = \theta.$$

Donc, quand on transforme $\mathfrak{g}'$ par $\varphi\theta$,

$$\begin{aligned}
&a \text{ est remplacé par } a' = 12.34.56 = ab^{-2}ab^2.b^2ab^{-2} = (ab^{-2})^3\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = bh.ck.lg = (\zeta^3)\left(\frac{\zeta+i^2}{i^2\zeta+1}\right),\\
&b \qquad \text{par} \qquad b' = 134.26 = a.b^{-2}ab^2.b^{-1}ab.a.a.bab^{-1}.a\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = ab^{-2}abab^2ab^{-1}a\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = akhcdl.bef = (\zeta^3)\left(\frac{\zeta-1}{\zeta-i}\right).
\end{aligned}$$

Les substitutions a, b, a', b' des formules (2), (3) répondent dans J à a, b, a', b' de Γ.

(¹) On ne confondra pas les *substitutions* que je vais désigner par a, b, avec les *symboles* a, b.

Il est clair qu'on pourrait vérifier directement que les équations (1) sont satisfaites quand on y remplace a par $a' = (ab^{-2})^3$ et b par $b' = ab^{-2}\,ab\,ab^2\,ab^{-1}\,a$.

5. Le second point que je voudrais rectifier est relatif au cas particulier $n = 7$. Il s'agissait de savoir si le multiplicateur du g^7 alterné est d'ordre 2 ou 6, et cela revenait à chercher s'il existait un groupe X d'ordre $3.\frac{1}{2}(7!)$ vérifiant

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{lllll} a^2 = 1, & b^5 = 1, & (ba)^4 = 1, & (ab^{-1}ab)^3 = 1, & (ab^{-2}ab^2)^2 = 1, \\ c^3 = 1, & (ca)^3 = 1, & (cb^{-1}ab)^2 = 1, & (cb^{-2}ab^2)^2 = \lambda, & (cb^{-3}ab^3)^2 = 1, \\ & \lambda^3 = 1, & a^{-1}\lambda a = b^{-1}\lambda b = c^{-1}\lambda c = \lambda. & & \end{array}\right.$$

J'ai montré que, si X existe, il admet une représentation X′ de degré 63 et une représentation X″ de degré 45. Mais, par suite de fautes de calcul, j'ai conclu à la non-existence de X′ et X″. C'est ce calcul que je vais reprendre brièvement en commençant par X′. Considérons les substitutions

$$\begin{aligned} a_\alpha &= (\alpha_2\alpha_8)(\alpha_3\alpha_7)(\alpha_4\alpha_9)(\alpha_5\alpha_{10})(\alpha_6\alpha_{11})(\alpha_{12}\alpha_{16})(\alpha_{14}\alpha_{17})(\alpha_{15}\alpha_{18}) \quad (^1), \\ b_\alpha &= (\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6)(\alpha_7\alpha_8\alpha_9\alpha_{10}\alpha_{11})(\alpha_{12}\alpha_{16}\alpha_{19}\alpha_{21}\alpha_{15})(\alpha_{13}\alpha_{17}\alpha_{20}\alpha_{14}\alpha_{18}), \\ c_\alpha &= (\alpha_1\alpha_2\alpha_7)(\alpha_3\alpha_{12}\alpha_8)(\alpha_4\alpha_{13}\alpha_9)(\alpha_5\alpha_{14}\alpha_{10})(\alpha_6\alpha_{15}\alpha_{11}), \end{aligned}$$

qui vérifient les équations déduites de (4) en y faisant $\lambda = 1$ et fournissent par suite une représentation du g^7 alterné (*M.*, 28). Désignons par a_ξ, b_ξ, c_ξ ce que deviennent a_α, b_α, c_α quand on y remplace les α par des ξ, et posons

$$\begin{gathered} a_0 = a_\alpha a_\beta a_\gamma, \qquad b_0 = b_\alpha b_\beta b_\gamma, \qquad c_0 = c_\alpha c_\beta c_\gamma, \\ \sigma_i = (\alpha_i\beta_i\gamma_i), \qquad \lambda = \Pi_1^{21}\sigma_i, \qquad x = \Pi_1^{21}\sigma_i^{x_i}, \qquad z = \Pi_1^{21}\sigma_i^{z_i}. \end{gathered}$$

Si X′ existe, on peut déterminer les x_i et les z_i de manière que $a = a_0 x$, $b = b_0$, $c = c_0 z$ vérifient (4). Les équations de la première ligne de (4) donnent par la méthode indiquée (*M.*, 34) les congruences

---

(1) Dans l'expression de a_α, à la page 430 de mon Mémoire, il faut lire $\alpha_{20}.\alpha_{21}$ pour $\alpha_{20}\alpha_{21}$. A la page 429, dans la formule (55), il faut lire $\gamma = \varepsilon'\lambda'^{-x'-y'}$ au lieu de $\gamma = \varepsilon^{-x'-y'}$. A la page 431, dans la définition de $\alpha_3, \ldots, \alpha_{15}$, il faut lire partout y au lieu de x.

suivantes (mod 3) :

$$(5)\quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \equiv x_1 \equiv x_{12} \equiv x_{13} \equiv x_{14} \equiv x_{15} \equiv x_{16} \equiv x_{17} \equiv x_{18} \equiv x_{19} \equiv x_{20} \equiv x_{21}, \\ x_{11} \equiv x_9 \equiv - x_6 \equiv - x_4, \;\; x_{10} \equiv - x_5, \;\; x_8 \equiv x_7 \equiv x_4 + x_5 \equiv - x_3 \equiv - x_2. \end{array} \right.$$

Les équations de la seconde ligne de (4) donnent, en tenant compte de (5),

$$(6)\quad \left\{ \begin{array}{c} 0 \equiv z_{16} \equiv z_{21}, \qquad 1 \equiv z_{17} \equiv - z_{18} \equiv - z_{19} \equiv z_{20}, \\ z_{15} \equiv z_{12} \equiv x_2 - z_8 - 1, \qquad z_{14} \equiv z_{13} \equiv x_7 - z_8, \\ z_{11} \equiv z_{10} - 1 \equiv z_9 - 1 \equiv z_8, \qquad z_7 \equiv x_2 + 1, \qquad z_6 \equiv z_3 \equiv 1 - x_2, \\ z_5 \equiv z_4 \equiv - x_2 - 1, \qquad z_1 \equiv - 1 - x_2 - z_2, \\ x_4 \equiv - x_2 - 1, \qquad x_5 \equiv 1 - x_2. \end{array} \right.$$

Les x_i et les z_i sont ainsi déterminés, mod 3, en fonction de x_2, z_2, z_8 qui restent arbitraires. M. Schur m'ayant communiqué (sous une forme un peu différente) la solution répondant à $x_2 = z_2 = 0$, $z_8 = -1$, j'ai pu trouver plus vite où mon calcul était en défaut. Je ne reproduis pas d'ailleurs ce calcul, qui est sans intérêt une fois la méthode indiquée. En faisant x_2, z_2 et z_8 nuls, on a

$$\begin{aligned} a &= a_0 \sigma_4^2 \sigma_5 \sigma_6^2 \sigma_9 \sigma_{10}^2 \sigma_{11} \\ &= (\alpha_2\alpha_8)(\alpha_3\alpha_7)(\alpha_{13}\alpha_{16})(\alpha_{14}\alpha_{17})(\alpha_{15}\alpha_{18})(\alpha_4\beta_9)(\alpha_5\gamma_{10})(\alpha_6\beta_{11}) \\ &\quad (\beta_2\beta_8)(\beta_3\beta_7)(\beta_{13}\beta_{16})(\beta_{14}\beta_{17})(\beta_{15}\beta_{18})(\beta_4\gamma_9)(\beta_5\alpha_{10})(\beta_6\gamma_{11}) \\ &\quad (\gamma_2\gamma_8)(\gamma_3\gamma_7)(\gamma_{13}\gamma_{16})(\gamma_{14}\gamma_{17})(\gamma_{15}\gamma_{18})(\gamma_4\alpha_9)(\gamma_5\beta_{10})(\gamma_6\alpha_{11}), \\ c &= c_0 \sigma_1^2 \sigma_3 \sigma_4^2 \sigma_5^2 \sigma_6 \sigma_7 \sigma_9 \sigma_{10} \sigma_{12}^2 \sigma_{15}^2 \sigma_{17} \sigma_{18}^2 \sigma_{19}^2 \sigma_{20} \\ &= (\alpha_1\alpha_2\beta_7)(\alpha_3\gamma_{12}\gamma_8)(\alpha_4\alpha_{13}\beta_9)(\alpha_5\alpha_{14}\beta_{10})(\alpha_6\gamma_{15}\gamma_{11}) \\ &\quad (\beta_1\beta_2\gamma_7)(\beta_3\alpha_{12}\alpha_8)(\beta_4\beta_{13}\gamma_9)(\beta_5\beta_{14}\gamma_{10})(\beta_6\alpha_{15}\alpha_{11}) \\ &\quad (\gamma_1\gamma_2\alpha_7)(\gamma_3\beta_{12}\beta_8)(\gamma_4\gamma_{13}\alpha_9)(\gamma_5\gamma_{14}\alpha_{10})(\gamma_6\beta_{15}\beta_{11}) \\ &\quad (\alpha_{17}\beta_{17}\gamma_{17})(\alpha_{18}\gamma_{18}\beta_{18})(\alpha_{19}\gamma_{19}\beta_{19})(\alpha_{20}\beta_{20}\gamma_{20}). \end{aligned}$$

4. Pour former X'', considérons les substitutions

$$\begin{aligned} a_\alpha &= (\alpha_1\alpha_{12})(\alpha_2\alpha_{14})(\alpha_3\alpha_8)(\alpha_5\alpha_{15})(\alpha_6\alpha_{13})(\alpha_7\alpha_{10}), \\ b_\alpha &= (\alpha_1\alpha_5\alpha_8\alpha_6\alpha_{12})(\alpha_2\alpha_{15}\alpha_4\alpha_{13}\alpha_7)(\alpha_3\alpha_{11}\alpha_{14}\alpha_{10}\alpha_9), \\ c_\alpha &= (\alpha_1\alpha_5\alpha_{13})(\alpha_2\alpha_6\alpha_8)(\alpha_3\alpha_{15}\alpha_{10})(\alpha_4\alpha_{11}\alpha_9)(\alpha_7\alpha_{12}\alpha_{14}), \end{aligned}$$

qui vérifient aussi les équations déduites de (1) en y faisant $\lambda = 1$, et fournissent par suite une représentation du g^7 alterné. On obtient cette représentation soit comme je l'ai indiqué (*M.*, 37), soit en formant, dans le $g^{15}_{\frac{8!}{2}}$ des substitutions linéaires à quatre variables (mod 2) isomorphe au g^8 alterné (Jordan, *Traité*, n° 516) A_8, le diviseur correspondant au diviseur de A_8 qui fixe un symbole (*voir S.*, 70).

Posons encore, en gardant les mêmes notations,

$$a_0 = a_\alpha a_\beta a_\gamma, \qquad b_0 = b_\alpha b_\beta b_\gamma, \qquad c_0 = c_\alpha c_\beta c_\gamma,$$
$$\sigma_i = (\alpha_i \beta_i \gamma_i), \qquad \lambda = \Pi_1^{15} \sigma_i, \qquad x = \Pi_1^{15} \sigma_i^{x_i}, \qquad z = \Pi_1^{15} \sigma_i^{z_i}.$$

Si X″ existe, on peut déterminer les x_i et les z_i, de manière que $a = a_0 x$, $b = b_0$, $c = c_0 z$ vérifient (4).

Les équations de la première ligne de (4) donnent (mod 3)

$$(7) \quad \begin{cases} 0 \equiv x_1 \equiv x_4 \equiv x_9 \equiv x_{11} \equiv x_{12}, \qquad 1 \equiv x_5 \equiv x_6, \qquad -1 \equiv x_{13} \equiv x_{15}, \\ x_{14} \equiv x_{10} \equiv -x_7 \equiv -x_2, \qquad x_8 \equiv x_2 + 1. \end{cases}$$

Celles de la seconde ligne de (4) donnent, en tenant compte de (7),

$$(8) \quad \begin{cases} 0 \equiv z_1 \equiv z_2 \equiv z_5 \equiv z_6 \equiv z_8 \equiv z_{13}, \qquad 1 \equiv z_3 \equiv z_9 \equiv z_{12}, \\ z_{11} \equiv z_{10} \equiv -x_2, \qquad z_7 \equiv x_2 + 1, \qquad z_{15} \equiv -z_{14} \equiv z_4 \equiv x_2 - 1, \\ x_3 \equiv -x_2 - 1, \end{cases}$$

et x_2 reste arbitraire. En faisant $x_2 = 0$, on a la solution

$$\begin{aligned} a = a_0 \sigma_3^2 \sigma_5 \sigma_6 \sigma_8 \sigma_{13}^2 \sigma_{15}^2 &= (\alpha_1 \alpha_{12})(\alpha_2 \alpha_{14})(\alpha_7 \alpha_{10})(\alpha_3 \beta_8)(\alpha_5 \gamma_{15})(\alpha_6 \gamma_{13}) \\ &\quad (\beta_1 \beta_{12})(\beta_2 \beta_{14})(\beta_7 \beta_{10})(\beta_3 \gamma_8)(\beta_5 \alpha_{15})(\beta_6 \alpha_{13}) \\ &\quad (\gamma_1 \gamma_{12})(\gamma_2 \gamma_{14})(\gamma_7 \gamma_{10})(\gamma_3 \alpha_8)(\gamma_5 \beta_{15})(\gamma_6 \beta_{13}), \\ c = c_0 \sigma_3 \sigma_4^2 \sigma_7 \sigma_9 \sigma_{12} \sigma_{14} \sigma_{15}^2 &= (\alpha_1 \alpha_5 \alpha_{13})(\alpha_2 \alpha_6 \alpha_8)(\alpha_3 \gamma_{15} \gamma_{10})(\alpha_4 \alpha_{11} \beta_9)(\alpha_7 \beta_{12} \gamma_{14}) \\ &\quad (\beta_1 \beta_5 \beta_{13})(\beta_2 \beta_6 \beta_8)(\beta_3 \alpha_{15} \alpha_{10})(\beta_4 \beta_{11} \gamma_9)(\beta_7 \gamma_{12} \alpha_{14}) \\ &\quad (\gamma_1 \gamma_5 \gamma_{13})(\gamma_2 \gamma_6 \gamma_8)(\gamma_3 \beta_{15} \beta_{10})(\gamma_4 \gamma_{11} \alpha_9)(\gamma_7 \alpha_{12} \beta_{14}). \end{aligned}$$

5. Le figuratif $\mathcal{G}$ du g^6 alterné Γ contient un diviseur isomorphe à U(2, 5). Car soit $\mathfrak{M} = \{\varepsilon, \lambda\}$ ($\varepsilon^2 = \lambda^3 = 1$, $\lambda\varepsilon = \varepsilon\lambda$), le multiplicateur (d'ordre 6). Au g_{60} A déjà considéré (*M.*, 34) de $\mathcal{G} | \mathfrak{M}$ répond dans $\mathcal{G} | \{\lambda\}$, un g_{120} B *qui n'est pas produit direct* (puisque ε est le carré des s_4 de B qui répondent aux s_2 de A) et qui est par conséquent isomorphe à U(2, 5) (Hölder, *M. A.*, t. XLVI, p. 354-355). Le $g_{3.120}$ C qui correspond à A dans $\mathcal{G}$ est le produit direct de B par $\{\lambda\}$ (Hölder, *loc. cit*).

$\mathcal{G}$ contient aussi un figuratif F du g^4 symétrique, F étant défini par

$$(9)\quad \begin{cases} a^2 = \varepsilon, \quad b^4 = \varepsilon, \quad (ba)^3 = \varepsilon, \quad (ab^{-1}ab)^3 = 1, \quad (ab^{-2}ab^2)^2 = \varepsilon, \\ \varepsilon^2 = 1, \quad a\varepsilon = \varepsilon a, \quad b\varepsilon = \varepsilon b, \end{cases}$$

et isomorphe à $\{U(2, 3), |\rho\xi, = \rho\eta|\}(\rho^2 = -1)$ (*M.*, 26). Car sans cela les équations de $\mathcal{G}$ établiraient entre a et b des relations autres que les conséquences de F, relations qui résulteraient des équations de $\mathcal{G}$ jointes à $\lambda = 1$. Or le groupe $\mathcal{G}_1$ défini par les équations de $\mathcal{G}$ jointes à $\lambda = 1$, n'étant pas le produit direct d'un g_{360} simple par $\{\varepsilon\}$ (puisque ε est dans son commutant), est isomorphe à $U(2, 9)$ (*S.*, 92), et, en identifiant les éléments correspondants de ces deux groupes, on peut prendre

$$a = \begin{vmatrix} \rho\xi + \rho\eta \\ -\rho\eta \end{vmatrix}, \qquad b = \begin{vmatrix} -\rho\xi + \rho\eta \\ -\rho\xi - \rho\eta \end{vmatrix}, \qquad c = \begin{vmatrix} -\xi \\ \rho\xi - \eta \end{vmatrix}.$$

Le diviseur $\{a, b\}$ de $U(2, 9)$, vérifiant (9) et contenant $\varepsilon = |-\xi, -\eta|$ est isomorphe à F. Donc les équations de $\mathcal{G}_1$ n'établissent pas entre a et b d'autres relations que les conséquences de F.

Soient maintenant $\mathcal{G}$ le figuratif du g^7 alterné Γ et $\mathfrak{M} = \{\varepsilon, \lambda\}$ ($\varepsilon^2 = \lambda^3 = 1$, $\lambda\varepsilon = \varepsilon\lambda$) son multiplicateur. On voit de même que $\mathcal{G}|\{\lambda\}$ contient un g_{336} B isomorphe à $U(2, 7)$, et $\mathcal{G}$ un $g_{3.336}$ C produit direct de B par $\{\lambda\}$. $\mathcal{G}|\{\lambda\}$ contient aussi un diviseur X isomorphe à un figuratif du g^5 symétrique défini par les équations de $\mathcal{G}$ jointes à $c = \lambda = 1$. En effet, $\mathcal{G}|\mathfrak{M}$ contenant un groupe isomorphe au g^5 symétrique (défini par les équations de $\mathcal{G}$ jointes à $\varepsilon = \lambda = c = 1$), pour que X ne divisât pas $\mathcal{G}|\{\lambda\}$, il faudrait que les équations de $\mathcal{G}$ jointes à $\lambda = 1$ entraînassent $\varepsilon = 1$, ce qui n'a évidemment pas lieu [$\mathcal{G}|\{\lambda\}$ serait d'ordre $\frac{1}{2}(7!)$]. On voit en même temps que X est isomorphe à G'_5 (*M.*, 26). Au $g_{2.120}$ X répond dans $\mathcal{G}$ un $g_{6.120}$ Y dont le commutant Q y a l'indice 2 ou 6. Cet indice n'est pas 2, car Y serait figuratif du g^5 symétrique. Il est donc 6, et λ est hors de Q. Donc Y est le produit direct de Q par $\{\lambda\}$. Le même raisonnement montrerait, indépendamment des théorèmes cités de M. Hölder, que le groupe nommé C pour $n = 6$ ou 7 est un produit direct.

Il est clair d'ailleurs que, pour $n > 7$, le figuratif $\mathcal{G}$ du g^n alterné Γ contient le figuratif du g^t symétrique ($t = n - 2$) pour lequel $\alpha = \varepsilon$.

6. Il me reste à indiquer comment des équations que j'ai obtenues pour les figuratifs du symétrique et de l'alterné on déduit celles de M. Schur et inversement.

Posons, dans les équations (1) du figuratif du symétrique,

$$(10) \qquad a = s_1, \qquad b^{-i}ab^i = s_{i+1}\varepsilon^{i(t-1)} \qquad (i = 1, \ldots, t-2);$$

d'où

$$s_{t-1}s_{t-2}\ldots s_1 = b^{1-t}(ab)^{t-1}\varepsilon^{(t-1)[1+2+\ldots+(t-2)]} = b\beta^{-1}\gamma\varepsilon^{\frac{(t-1)^2(t-2)}{2}};$$

$$\frac{(t-1)^2(t-2)}{2} \equiv \begin{cases} \tau - 1 & \text{si} \quad t = 2\tau \\ 0 & \text{si} \quad t = 2\tau + 1 \end{cases} \pmod 2.$$

On aura

$$(11) \qquad \left\{\begin{array}{l} s_h^2 = \varepsilon^x, \qquad \varepsilon^2 = 1, \qquad \varepsilon s_h = s_h\varepsilon, \qquad (s_i s_{i+1})^3 = \varepsilon^x \\ (h = 1, \ldots, t-1;\ i = 1, \ldots, t-2;\ x = 0 \text{ ou } 1), \\ \qquad (s_j s_{j+k})^2 = \varepsilon \qquad \text{ou} \qquad s_j s_{j+k} = \varepsilon s_{j+k} s_j \\ \qquad (j = 1, \ldots, t-3;\ k = 2, \ldots, t-j-1). \end{array}\right.$$

Inversement, en posant $s_1 = a$, $b = s_{t-1}s_{t-2}\ldots s_1$, on aura d'abord, d'après (11),

$$b^{-1}s_h b = s_{h+1}\varepsilon^{t-1},$$

donc

$$s_{h+1} = b^{-1}s_h b\varepsilon^{t-1} = \ldots = b^{-l-1}s_{h-l}b^{l+1}\varepsilon^{(l+1)(t-1)} = \ldots = b^{-h}s_1 b^h\varepsilon^{h(t-1)},$$

puis, par récurrence, en observant que

$$(s_1\ldots s_{h-1})s_h(s_{h-1}\ldots s_1) = (s_h s_{h-1}\ldots s_2)s_1(s_2\ldots s_h),$$

$$(s_h\ldots s_1)^l = (s_h\ldots s_2)^r s_1\ldots s_r(s_h\ldots s_1)^{l-r}\varepsilon^{h\frac{r(r-1)}{2}};$$

d'où, pour $h = r = l - 1$,

$$(s_{l-1}\ldots s_1)^l = (s_{l-1}\ldots s_2)^{l-1}\varepsilon^{x(l-1)+\frac{(l-1)^2(l-2)}{2}} = \ldots$$
$$= \varepsilon^{x[(l-1)+(l-2)+\ldots+1]+\frac{1}{2}[(l-1)^2(l-2)+(l-2)^2(l-3)+\ldots+2^2.1]},$$

ou, en désignant par λ le plus grand entier $\leqq \frac{l}{2}$,

$$(12) \qquad (s_{l-1}\ldots s_1)^l = \varepsilon^{x\frac{l(l-1)}{2}+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}}.$$

Donc

$$b^t = \varepsilon^{x\frac{t(t-1)}{2} + \frac{\tau(\tau-1)}{2}};$$

$$(ba)^{t-1} = \varepsilon^{x\frac{t(t-1)}{2} + \frac{\tau(\tau-1)}{2} + y}, \qquad y \equiv \begin{cases} \tau - 1 & \text{si} \quad t = 2\tau \\ 0 & \text{si} \quad t = 2\tau + 1 \end{cases} \qquad (\text{mod } 2).$$

On obtient d'ailleurs de suite

$$(ab^{-1}ab)^3 = \varepsilon^{x+t+1}, \qquad (ab^{-j}ab^j)^2 = \varepsilon \qquad (j = 2, \ldots, \tau).$$

Il est clair, d'après (11), que le figuratif $\{s_1, \ldots, s_{t+1}\}$ contient le figuratif $\{s_h, \ldots, s_{h+q}\}$; (12) permet de calculer l'ordre des deux éléments correspondant, dans ce dernier groupe, au cycle $(h, h+1, \ldots, h+q+1)$ de Γ et par suite l'ordre des éléments répondant, dans $\{s_1, \ldots, s_{t+1}\}$, à toute substitution de Γ.

Pour $n > 7$ ou $n = 4, 5$, les équations du figuratif du g^n alterné que j'ai obtenues sont :

$$(13) \quad \begin{cases} a^2 = \varepsilon, \quad b^t = \beta, \quad (ba)^{t-1} = \gamma, \quad (ab^{-1}ab)^3 = \varepsilon^t, \quad (ab^{-j}ab^j)^2 = \varepsilon, \quad \varepsilon^2 = 1, \\ \qquad c^3 = \varepsilon^{1+x}, \qquad (ac)^3 = \varepsilon^{1+z}, \qquad (cb^{-k}ab^k)^2 = \varepsilon; \\ \beta = \varepsilon^{\frac{t(t-1)}{2} + t + \frac{\tau(\tau-1)}{2}}, \qquad \gamma = \beta\varepsilon^y, \qquad t = n - 2 = 2\tau + 1 \quad \text{ou} \quad 2\tau; \\ \qquad j = 2, \ldots, \tau; \qquad k = 1, \ldots, t-2; \qquad x, y, z \text{ sont arbitraires.} \\ \text{Si } n = 5, \text{ il faut supprimer l'équation } (ab^{-j}ab^j)^2 = \varepsilon; \text{ si } n = 4, \text{ il faut} \\ \quad \text{supprimer toutes les équations où figure } b\ [(ba)^{t-1} = \gamma \text{ permet alors} \\ \quad \text{d'exprimer } b \text{ par } a]. \end{cases}$$

En faisant, dans les équations de la première ligne, le changement de générateurs (10) et en prenant $x = z = 0$, on obtient un système formé des équations (11) où $x = 0$ et des équations

$$(14) \qquad c^3 = \varepsilon, \qquad (ac)^3 = \varepsilon, \qquad (cs_{k+1})^2 = \varepsilon.$$

C'est le système de M. Schur d'où l'on revient comme précédemment à (13).

Pour $n = 6$ et 7, il suffit, dans (13), de remplacer $(cb^{-2}ab^2)^2 = \varepsilon$ par $(cb^{-2}ab^2)^2 = \varepsilon\lambda$ ($\lambda^3 = 1$, $a^{-1}\lambda a = b^{-1}\lambda b = c^{-1}\lambda c = \lambda$) et, dans (14), $(cs_3)^2 = \varepsilon$ par $(cs_3)^2 = \varepsilon\lambda$, le changement de générateurs restant le même.

Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre par la méthode de M. Darboux;

PAR M. E. GAU.

INTRODUCTION.

La méthode de M. Darboux constitue, dans l'état actuel de la Science, le moyen le plus puissant dont on dispose pour intégrer une équation aux dérivées partielles, c'est-à-dire pour ramener son intégration à celle d'un système d'équations différentielles ordinaires.

En ce qui concerne les équations du second ordre, cette méthode peut se résumer en quelques mots; elle repose essentiellement sur la remarque suivante : si

$$U(x, y, z, p, q, \ldots) = \text{const.}$$

et

$$V(x, y, z, p, q, \ldots) = \text{const.}$$

sont deux combinaisons intégrables distinctes de l'un des systèmes de caractéristiques de l'équation proposée, c'est-à-dire si U et V sont deux invariants distincts pour ce système de caractéristiques, l'équation $U = f(V)$, où f est une fonction arbitraire, admet avec la proposée une intégrale commune dépendant d'une fonction arbitraire ; on peut dire encore : quelle que soit la forme de f, l'équation $U = f(V)$ forme avec la proposée un *système en involution*, en adoptant la définition communément admise, proposée par M. Goursat [1], des systèmes en involution.

Dans ce cas, on démontre facilement que la solution du problème de Cauchy se ramène à l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires [2].

S'il existe deux invariants distincts pour chacun des deux systèmes de caractéristiques, l'intégrale générale de l'équation peut s'exprimer par des formules qui donnent x, y, z en fonction de deux variables indépendantes α et β, de p fonctions arbitraires de α, de q fonctions arbitraires de β et des dérivées de ces fonctions en nombre fini, les p fonctions de α étant assujetties à vérifier $p-1$ équations différentielles d'ordre quelconque, ainsi que les q fonctions de β : nous dirons dans ce cas, avec M. Goursat, que l'intégrale générale est de la *première classe* [3].

La réciproque de cette propriété est vraie, ainsi que l'avait annoncé M. Darboux dans son Mémoire ; M. Goursat en a donné une démonstration très simple [4].

La méthode consiste donc essentiellement à chercher des invariants pour les caractéristiques d'ordres croissants $1, 2, \ldots, n, \ldots$.

Malheureusement, on ne connaît aucun moyen pour déterminer *a priori* l'ordre de ces invariants, ou même une limite supérieure de cet ordre ; de sorte que lorsqu'on a constaté qu'une équation donnée n'admet pas deux invariants d'ordre inférieur ou égal à n pour l'un des systèmes, rien ne prouve qu'il n'existe pas deux invariants d'ordre inférieur ou égal à $n+1$; l'application de la méthode de M. Darboux conduit donc, en général, à une infinité d'opérations.

Un fait analogue se produit lorsqu'on veut intégrer une équation

---

(1) GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. II, Chap. VI, p. 82.

(2) *Ibid.*, Chap. VII, p. 139.

(3) *Ibid.*, Chap. VIII, p. 217.

(4) *Ibid.*, p. 220.

linéaire de la forme $s = ap + bq + cz$ par la méthode de Laplace : on ne sait pas *a priori* si l'une des deux suites d'invariants se terminera au bout d'un nombre fini de termes ; d'ailleurs, dans ce cas, la méthode de Laplace et celle de M. Darboux conduisent aux mêmes opérations.

Depuis la publication du Mémoire de M. Darboux (1) plusieurs géomètres se sont attachés à montrer l'importance de la nouvelle méthode, à la perfectionner et à en donner des applications ; on peut citer en particulier M. Speckmann (2) et surtout M. Goursat, qui a consacré à ce sujet un des plus beaux Chapitres de ses *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre.* Quelques travaux, peu nombreux, ont été publiés sur l'application de cette méthode à certains types d'équations ; on peut citer deux Mémoires de M. Goursat (3), où l'auteur a classé et intégré toutes les équations de la forme $s = f(x, y, z, p, q)$ qui admettent un invariant d'ordre inférieur ou égal à deux, distinct de x ou y, pour chaque système de caractéristiques. M. von Boer a traité la même question pour les équations de la forme $s = f(r, t)$ (4).

Le problème général de la recherche des invariants d'ordre quelconque n'a été résolu jusqu'ici, à ma connaissance, que pour l'équation $s = f(z)$ par Sophus Lie (5), et pour l'équation plus générale $s = f(x, y, z)$ par M. Clairin (6).

Ces deux exemples ont été traités avec une élégante simplicité ; néanmoins, en général, ces questions exigent des calculs compliqués,

---

(1) *Annales de l'École Normale supérieure*, 1re série, t. VII. Ce Mémoire est reproduit à la fin du Tome IV des *Leçons sur la théorie des surfaces* (Note X).

(2) *La Méthode de M. Darboux pour l'intégration d'équations aux dérivées partielles, non linéaires du second ordre* (*Archives néerlandaises des Sciences exactes et naturelles*, t. XXVII, 1894).

(3) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. I, 1899.

(4) *Application de la Méthode de Darboux à l'intégration de l'équation différentielle* $s = f(r, t)$. (*Archives néerlandaises des Sciences exactes et naturelles*, t. XXVII, 1894.)

(5) La démonstration de Sophus Lie est reproduite dans les *Leçons* de M. Goursat, t. II, p. 182.

(6) *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XXIX, 1905, p. 177.

qui deviennent inabordables lorsque l'équation n'a pas une forme simple.

Les progrès de cette théorie dépendent de la connaissance approfondie de la structure des invariants, mais ce problème lui-même apparaît comme très difficile, malgré les beaux théorèmes énoncés à ce sujet par M. Goursat.

Le présent travail est divisé en trois Parties :

Dans la première, j'expose tout d'abord un nouveau moyen pour former des invariants : lorsqu'on connaît trois équations distinctes, d'ordre supérieur à trois, en involution avec la proposée et du même système, on peut en déduire un invariant par des opérations simples n'exigeant aucune intégration ; si l'on connaît quatre équations en involution, on peut former deux invariants et, par suite, une intégrale intermédiaire : l'équation s'intègre par la Méthode de M. Darboux.

Cela met en évidence la relation étroite qui existe entre le problème de la recherche des invariants et celui de la recherche des équations en involution ; lorsqu'on a trouvé une telle équation, non seulement on peut en déduire pour l'équation proposée une infinité d'intégrales dépendant d'une infinité de constantes arbitraires, mais encore on peut considérer qu'on a fait un progrès dans la recherche de l'intégrale générale elle-même. Je crois d'ailleurs qu'il y a, en général, intérêt à remplacer la recherche des invariants par celle des équations en involution, dans l'application de la méthode de M. Darboux.

En second lieu, je démontre, dans le cas des équations de forme quelconque, un théorème démontré par M. Goursat pour les équations $s = f(x, y, z, p, q)$: *tout invariant d'ordre supérieur à trois peut s'écrire sous forme linéaire par rapport aux dérivées d'ordre supérieur;* cette propriété permet de simplifier la recherche des invariants : dans tous les cas, l'ordre des équations aux dérivées partielles qui interviennent est abaissé au moins d'une unité ; j'ai donné également une forme réduite simple pour les invariants du troisième ordre.

Le Chapitre II est consacré à l'étude des équations de la forme $s = f(x, y, z, p, q)$; les résultats précédents deviennent particulièrement simples dans ce cas ; il suffit de deux équations en involution pour former un invariant, et l'on peut voir nettement l'avantage qu'il y a à substituer à la recherche des invariants celle des équations en involution. J'ai étudié, en outre, la forme des expressions $\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right)$, qui sont d'une importance capitale dans cette théorie, et j'en ai déduit deux remarques d'une application très générale, et une condition nécessaire, simple, pour qu'une équation de la forme $s = f(x, y, z, p, q)$ admette un invariant autre que x ou y.

Dans le Chapitre III, j'ai étudié les équations de la forme

$$s = a(x, y, z)p + b(x, y, z)q + c(x, y, z)$$

au point de vue de l'existence des invariants; j'ai dû me borner, afin de ne pas donner à ce calcul un développement exagéré, au cas où a et b dépendent effectivement de la variable z, ce qui revient à supposer $ab \neq 0$, et à indiquer sommairement les résultats dans le cas où l'un des coefficients a, b est nul; le cas où l'équation considérée est réductible à la forme $s = a(x, y, z)pq$ est étudié complètement.

Les calculs sont longs, mais les résultats sont simples; ils permettent, étant donnée une équation déterminée, de vérifier, par des opérations élémentaires, si elle peut admettre une intégrale générale de la première classe, et dans ce cas de ramener son intégration à celle d'une équation linéaire. Pour l'équation $s = a(x, y, z)pq$ la conclusion est encore plus simple : il n'y a que trois formes d'équations de ce genre dont l'intégrale générale soit de la première classe; l'équation donnée doit se réduire à l'une de ces trois formes par une transformation simple, et, dans ce cas, l'intégration est immédiate.

L'étude du cas où l'équation $s = ap + bq + c$ est en involution avec deux équations de systèmes différents et d'ordre supérieur à l'unité, sans être en involution avec une équation d'ordre inférieur, fournit un résultat qui est, je crois, susceptible de généralisation; dans ce cas, en effet, sans supposer l'existence d'invariants, l'équation est nécessairement du type des équations trouvées par M. Moutard, et, par suite, elle se ramène à une équation linéaire par une transformation connue; or, pour une équation linéaire, la connaissance d'une seule équation en involution suffit pour former un invariant. Il est probable que ce fait est général et que, lorsqu'une équation du second ordre peut former un système en involution avec une autre d'ordre quelconque, il existe une transformation qui permet de ramener l'équation proposée à une équation de même nature, mais où les coefficients sont tels que le nombre minimum d'équations en involution, nécessaires pour former un invariant, est diminué d'une unité.

M. Goursat a bien voulu s'intéresser à ce travail et m'encourager pendant mes recherches; qu'il me permette de lui en exprimer ici ma vive reconnaissance.

CHAPITRE I.

LES INVARIANTS DES CARACTÉRISTIQUES DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE DU SECOND ORDRE.

1. Considérons une équation aux dérivées partielles du second ordre quelconque, $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$, d'après les notations habituelles. Si cette équation contient effectivement la dérivée seconde r, on pourra l'écrire sous la forme

$$r + f(x, y, z, p, q, s, t) = 0. \tag{1}$$

Si elle ne contient pas r, mais contient t, on pourra encore la mettre sous la forme précédente, en échangeant simplement le rôle des variables x et y. Enfin, si F ne contient ni r, ni t, elle peut s'écrire

$$s = f(x, y, z, p, q). \tag{2}$$

On pourrait encore ramener cette équation à la forme (1); il suffirait de faire le changement de variables indépendantes bien connu,

$$x = x' + y', \qquad y = x' - y',$$

mais l'équation (2) étant plus facile à étudier et conduisant à des résultats particulièrement simples, nous l'étudierons directement.

Dans la suite, nous poserons comme d'habitude $p_{ik} = \dfrac{\partial^{i+k} z}{\partial x_i \partial y_k}$; l'équation (1) et celles qu'on en déduit par des différentiations répétées permettent d'exprimer toutes les quantités p_{ik}, au moyen de celles dont l'indice i a l'une des valeurs o ou 1 [1].

Soit $U(x, y, z, p_{n0}, \ldots, p_{0n})$ une fonction de x, y, z et des dérivées de z jusqu'à l'ordre n. Si dans U nous remplaçons les dérivées p_{ik} par leur valeur en fonction des dérivées p_{0k} et p_{1k} tirées de l'équation (1), nous obtenons une fonction de x, y, z, p_{01}, $\ldots$, p_{0n}, p_{10}, $\ldots$, $p_{1,n-1}$. Nous désignerons cette opération par le symbole $[U]$.

Si l'on différentie la fonction U, i fois par rapport à x et k fois par rapport à y successivement, en considérant z et ses dérivées p_{ik} comme des fonctions de x, y, on obtient une fonction de x, y, z, et des dérivées de z jusqu'à l'ordre $n+i+k$; nous la désignerons par $\frac{d^{i+k}U}{dx^i dy^k}$; supposons que, dans cette dernière expression, on supprime les termes qui contiennent les dérivées d'ordre $n+i+k$ et que dans le résultat obtenu on remplace encore les quantités p_{ik} en fonction de p_{0k} et p_{ik} d'après l'équation (1) : on obtient ainsi une expression que nous désignerons par $\left(\frac{d^{i+k}U}{dx^i dx^k}\right)$. On a donc l'identité

$$\left[\frac{d^{i+k}U}{dx^i\,dx^k}\right] = \left[\frac{\partial U}{\partial p_{n0}} p_{n+i,k} + \ldots + \frac{\partial U}{\partial p_{0n}} p_{i,n+k}\right] + \left(\frac{d^{i+k}U}{dx^i\,dy^k}\right).$$

Ces notations, qui simplifient considérablement l'écriture, sont en grande partie empruntées à M. Goursat.

2. Nous allons, maintenant, faire une remarque fondamentale, au sujet de la forme des expressions $\left[\frac{d^n f}{dy_n}\right]$. On a tout d'abord

$$\left[\frac{df}{dy}\right] = p_{1.2}\frac{\partial f}{\partial s} + p_{0.3}\frac{\partial f}{\partial t} + \left(\frac{df}{dy}\right).$$

Nous poserons

$$H = \left(\frac{df}{dy}\right) = \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} + s\frac{\partial f}{\partial p} + t\frac{\partial f}{\partial q}.$$

On a ensuite

$$\left[\frac{d^2 f}{dy^2}\right] = p_{1.3}\frac{\partial f}{\partial s} + p_{0.4}\frac{\partial f}{\partial t} + p_{1.2}\left[\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial s}\right] + p_{0.3}\left[\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial t}\right] + \left[\frac{dH}{dy}\right]$$

[1] *Voir* GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. II, p. 78.

en développant les calculs, on trouve facilement

$$(3)\quad \left[\frac{d^2f}{dy^2}\right]=p_{1,3}\frac{\partial f}{\partial s}+p_{0,4}\frac{\partial f}{\partial t}+p_{1,2}^2\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}+2p_{1,2}p_{0,3}\frac{\partial^2 f}{\partial s\,\partial t}+p_{0,3}^2\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$
$$+p_{1,2}\left[\left(\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial s}\right)+\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial s}\right]+p_{0,3}\left[\left(\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial t}\right)+\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t}\right]+\left(\frac{d\mathrm{H}}{dy}\right).$$

Calculons encore $\left[\frac{d^3f}{dy^3}\right]$; on a

$$(4)\quad \left[\frac{d^3f}{dy^3}\right]=p_{1,4}\frac{\partial f}{\partial s}+p_{0,5}\frac{\partial f}{\partial t}$$
$$+p_{1,3}\left\{\left[\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial s}\right]+2p_{1,2}\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}+2p_{0,3}\frac{\partial^2 f}{\partial s\,\partial t}+\left(\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial s}\right)+\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial s}\right\}$$
$$+p_{0,4}\left\{\left[\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial t}\right]+2p_{1,2}\frac{\partial^2 f}{\partial s\,\partial t}+2p_{0,3}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+\left(\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial t}\right)+\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t}\right\}+\mathrm{J}_3,$$

J_3 ne dépendant pas des dérivées d'ordre supérieur à trois. On voit que l'expression précédente est linéaire par rapport aux dérivées : $p_{1,4}$, $p_{0,5}$, $p_{1,3}$, $p_{0,4}$. Je dis que, d'une façon générale, on a, si $n>2$,

$$\left[\frac{d^nf}{dy^n}\right]=p_{1,n+1}\frac{\partial f}{\partial s}+p_{0,n+2}\frac{\partial f}{\partial t}+p_{1,n}\mathrm{M}_n+p_{0,n+1}\mathrm{N}_n+\mathrm{J}_n,$$

J_n ne dépendant pas des dérivées d'ordre supérieur à n; en effet, la proposition est vraie pour $n=3$; supposons qu'elle le soit pour la valeur $n-1$ de l'indice, c'est-à-dire qu'on ait

$$\left[\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right]=p_{1,n}\frac{\partial f}{\partial s}+p_{0,n+1}\frac{\partial f}{\partial t}+p_{1,n-1}\mathrm{M}_{n-1}+p_{0,n}\mathrm{N}_{n-1}+\mathrm{J}_{n-1};$$

on en déduit, par une dérivation,

$$\left[\frac{d^nf}{dy^n}\right]=p_{1,n+1}\frac{\partial f}{\partial s}+p_{0,n+2}\frac{\partial f}{\partial t}+p_{1,n}\left\{\left[\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial s}\right]+\mathrm{M}_{n-1}\right\}$$
$$+p_{0,n+1}\left\{\left[\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial t}\right]+\mathrm{N}_{n-1}\right\}+\mathrm{J}_n.$$

Si $n>2$, les coefficients de $p_{1,n}$ et de $p_{0,n+1}$ ne dépendent pas de ces dérivées, ce qui démontre la proposition énoncée. On voit, en outre, qu'on a

$$\mathrm{M}_n=\mathrm{M}_{n-1}+\left[\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial s}\right],$$
$$\mathrm{N}_n=\mathrm{N}_{n-1}+\left[\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial t}\right].$$

Ces formules permettent de calculer M_n et N_n par voie de récurrence. On déduit de la première, par le procédé classique

$$(5) \qquad M_n = M_3 + (n-3)\left[\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial s}\right].$$

La valeur de M_3 se tire immédiatement de la relation (4); après quelques simplifications, on trouve sans difficulté

$$(6) \qquad \left\{\begin{aligned} &M_n = n\left[\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial s}\right] - \frac{\partial f}{\partial p}, \\ &\text{et, de même,} \\ &N_n = n\left[\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial t}\right] + \frac{\partial f}{\partial q}. \end{aligned}\right.$$

3. Cela posé, soit $\varphi(x, y, z, p_{n,0}, \ldots, p_{0,n}) = 0$ une équation aux dérivées partielles d'ordre n, formant avec la proposée $r + f = 0$ un système en involution. Il est clair que si l'on remplace dans φ les dérivées p_{ik} en fonction de p_{0k} et p_{1k} au moyen de l'équation (1), on obtient encore une équation d'ordre n, en involution avec la proposée; nous supposerons toujours, dans la suite, que cette opération a été effectuée et que φ est de la forme

$$\varphi(x, y, z, p_{0,1}, \ldots, p_{0,n}, p_{1,0}, \ldots, p_{1,n-1}).$$

Dans ces conditions, pour que le système considéré soit en involution il est nécessaire et suffisant que φ vérifie l'un des deux systèmes d'équations (¹):

$$(\mathrm{A}) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial p_{0,n}} - m_1\frac{\partial\varphi}{\partial p_{1,n-1}} = 0, \\ &\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + m_2\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) - \frac{\partial\varphi}{\partial p_{1,n-1}}\left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right) = 0; \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{B}) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial p_{0,n}} - m_2\frac{\partial\varphi}{\partial p_{1,n-1}} = 0, \\ &\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + m_1\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) - \frac{\partial\varphi}{\partial p_{1,n-1}}\left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right) = 0. \end{aligned}\right.$$

(¹) GOURSAT, *Leçons sur l'intégration*, etc., t. II, p. 83.

en appelant m_1 et m_2 les deux racines de l'équation qui détermine les caractéristiques

$$m^2 - \frac{\partial f}{\partial s} m + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \tag{7}$$

Il suffit, d'ailleurs, que le système (A) ou (B) soit vérifié en tenant compte de la relation $\varphi = 0$ elle-même. Supposons, par exemple, que φ vérifie le système (A), nous dirons pour abréger que φ est du système (A).

La première équation (A) montre que $\frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,n-1}} \neq 0$, sans quoi on aurait aussi $\frac{\partial \varphi}{\partial p_{0,n}} = 0$, et l'équation $\varphi = 0$ serait d'ordre inférieur à n, ce qui est absurde. On peut donc toujours résoudre $\varphi = 0$ par rapport à $p_{1,n-1}$ et écrire

$$\varphi \equiv p_{1,n-1} + \psi(x, y, z, p_{0,1}, \ldots, p_{0,n}, p_{1,0}, \ldots, p_{1,n-2}) = 0, \tag{8}$$

la première équation (A) devient alors

$$\frac{\partial \psi}{\partial p_{0,n}} - m_1 = 0.$$

Si $n > 2$, on aura donc

$$\psi \equiv m_1 p_{0,n} + u(x, y, z, p_{0,1}, \ldots, p_{0,n-1}, p_{1,0}, \ldots, p_{1,n-2}). \tag{9}$$

La première équation (A) est alors identiquement vérifiée, et il reste la seule condition

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + m_2\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) - \left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right) = 0, \tag{10}$$

qui doit être vérifiée identiquement lorsqu'on y fait $p_{1,n-1} = -\psi$. Or, on a

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = \left(\frac{d\psi}{dx}\right) = p_{0,n}\left[\frac{dm_1}{dx}\right] + \left[\frac{du}{dx}\right],$$
$$\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) = \left(\frac{d\psi}{dy}\right) = p_{0,n}\left[\frac{dm_1}{dy}\right] + \left[\frac{du}{dy}\right]$$

et

$$\left[\frac{du}{dx}\right] = \frac{\partial u}{\partial p_{0,n-1}} p_{1,n-1} - \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-2}}\left[\frac{d^{n-2}f}{dy^{n-2}}\right] + \left(\frac{du}{dx}\right),$$
$$\left[\frac{du}{dy}\right] = \frac{\partial u}{\partial p_{0,n-1}} p_{0,n} + \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-2}} p_{1,n-1} + \left(\frac{du}{dy}\right).$$

Ces deux dernières égalités ne sont exactes que si u dépend effectivement de l'une au moins des dérivées d'ordre $n-1$; s'il n'en est pas ainsi $\left[\frac{du}{dx}\right]$ et $\left[\frac{du}{dy}\right]$ ne dépendent pas des dérivées d'ordre n; comme dans ce qui suit, nous ne nous servons jamais des expressions $\left(\frac{du}{dx}\right)$, $\left(\frac{du}{dy}\right)$ elles-mêmes, mais simplement de ce fait qu'elles ne dépendent pas des dérivées d'ordre n, on voit que nous pouvons nous servir des égalités précédentes, sans rien changer aux raisonnements, même lorsque $\frac{\partial u}{\partial p_{0.n-1}}$ et $\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-2}}$ sont nuls; d'ailleurs, il est facile de faire directement le calcul dans ce cas et de vérifier qu'on arrive aux mêmes résultats.

Dans ces conditions, la relation (10) se met sous la forme

$$(11)\quad \begin{aligned} p_{0.n}\left\{\left[\frac{dm_1}{dx}\right]+m_2\left[\frac{dm_1}{dy}\right]\right\}+\frac{\partial u}{\partial p_{0.n-1}}(p_{1.n-1}+m_2 p_{0,n}) \\ -\frac{\partial u}{\partial p_{1.n-2}}\left[\frac{\partial f}{\partial s}p_{1,n-1}+\frac{\partial f}{\partial t}p_{0.n}+\left(\frac{d^{n-2}f}{dy^{n-2}}\right)-m_2 p_{1,n-1}\right] \\ +\left(\frac{du}{dx}\right)+m_2\left(\frac{du}{dy}\right)-\left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right)=0. \end{aligned}$$

Supposons d'abord $n>3$. On a alors, d'après la remarque faite précédemment,

$$\left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right)=M_{n-1}p_{1,n-1}+N_{n-1}p_{0,n}+J_{n-1}.$$

Si dans la relation (11) on fait

$$p_{1.n-1}=-\psi=-(m_1 p_{0.n}+u),$$

on obtient une relation linéaire en $p_{0,n}$, qui doit être une identité. Écrivons en particulier que le coefficient de $p_{0.n}$ est nul; en tenant compte des relations

$$m_1+m_2=\frac{\partial f}{\partial s},\qquad m_1 m_2=\frac{\partial f}{\partial t},$$

la condition ainsi obtenue se met facilement sous la forme

$$(12)\quad \begin{aligned} \left[\frac{dm_1}{dx}\right]+m_2\left[\frac{dm_1}{dy}\right] \\ +(m_2-m_1)\left(\frac{\partial u}{\partial p_{0.n-1}}-m_1\frac{\partial u}{\partial p_{1.n-2}}\right)+m_1 M_{n-1}-N_{n-1}=0. \end{aligned}$$

Dans ce qui suit, nous nous occuperons plus spécialement des équations à caractéristiques distinctes; d'ailleurs, M. Goursat a déterminé toutes les équations du second ordre à caractéristiques confondues auxquelles s'applique la méthode de M. Darboux ([1]), ce qui diminue de beaucoup l'intérêt de notre étude dans ce cas. Nous appellerons caractéristiques (I) celles qui correspondent à la racine m_1, et caractéristiques (II) celles qui correspondent à m_2.

Supposons qu'on se déplace sur une caractéristique d'ordre n du système (II); dans ces conditions les quantités y, z, $p_{0,1}$, ..., $p_{0,n}$, $p_{1,0}$, ..., $p_{1,n-1}$ sont des fonctions de la seule variable x: si l'on substitue ces valeurs dans φ, on obtient une fonction de x dont la dérivée a pour expression

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{dp_{1,n-1}}{dx} + m_1 \frac{dp_{0,n}}{dx} - \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + m_2\left(\frac{d\varphi}{dy}\right).$$

Or, l'une des équations qui définissent les caractéristiques d'ordre n du système (II) est

$$dp_{1,n-1} + m_1\, dp_{0,n} + \left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right) dx = 0.$$

On aura donc, en tenant compte de cette relation ([2]),

$$\frac{d\varphi}{dx} = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + m_2\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) - \left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right),$$

c'est-à-dire, précisément, le premier membre de l'équation (10); si nous remplaçons φ par $p_{1,n-1} + m_1 p_{0,n} + u(x, y, z, p_{0,1}, \ldots, p_{0,n-1}, p_{1,0}, \ldots, p_{1,n-2})$, nous aurons donc le premier membre de l'équation (11); dans cette expression (11) remplaçons, maintenant, $p_{1,n-1}$ par $\varphi - \psi$, il vient

$$\frac{d\varphi}{dx} = \varphi\left[\frac{\partial u}{\partial p_{0,n-1}} - m_1 \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-2}} - \mathrm{M}_{n-1}\right] + \mathrm{K},$$

K est précisément le résultat de la substitution de $p_{1,n-1}$ par $-\psi$ dans le premier membre de l'équation (11), nous avons vu qu'il était

([1]) Goursat, *Leçons sur l'intégration*, etc., t. II, p. 164.

([2]) *Voir*, à ce sujet, Goursat, *Leçons sur l'intégration*, etc., t. II, p. 91.

identiquement nul. Donc on a

$$\frac{d\varphi}{dx} = \left(\frac{\partial u}{\partial p_{0,n-1}} - m_1 \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-2}} - \mathrm{M}_{n-1}\right)\varphi. \tag{13}$$

Comme nous avons $m_1 - m_2 \neq 0$, nous pouvons tirer

$$\left(\frac{\partial u}{\partial p_{0,n-1}} - m_1 \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-2}}\right)$$

de l'équation (12), il vient

$$\frac{\partial u}{\partial p_{0,n-1}} - m_1 \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-2}} - \mathrm{M}_{n-1} = \frac{1}{m_1 - m_2}\left\{\left[\frac{dm_1}{dx}\right] + m_2\left[\frac{dm_1}{dy}\right] + m_2 \mathrm{M}_{n-1} - \mathrm{N}_{n-1}\right\},$$

en remplaçant M_{n-1}, N_{n-1} par leurs valeurs, on trouve, après quelques réductions,

$$\frac{d\varphi}{dx} = \varphi(\mathrm{A}n + \mathrm{B}), \tag{14}$$

en posant

$$\mathrm{A} = -\left[\frac{dm_2}{dy}\right],$$

$$\mathrm{B} = \frac{1}{m_2 - m_1}\left\{(m_2 - m_1)\left[\frac{dm_2}{dy}\right] + \frac{\partial f}{\partial q} - m_2 \frac{\partial f}{\partial p} - \left[\frac{dm_1}{dx}\right] - m_2\left[\frac{dm_1}{dy}\right]\right\}.$$

A et B sont donc des quantités absolument indépendantes de φ, et que l'on calcule facilement en partant de l'équation proposée $r + f = 0$; il faut remarquer, d'ailleurs, que nous avons établi la relation (14) en supposant $n > 3$.

Sur toute caractéristique d'ordre n du système (II), qui ne vérifie pas l'équation $\varphi = 0$, c'est-à-dire qui n'est pas caractéristique du système en involution

$$r + f = 0, \qquad \varphi = 0,$$

on aura donc

$$\frac{d \log \varphi}{dx} = \mathrm{A}n + \mathrm{B}; \tag{15}$$

si l'on connaît trois équations distinctes en involution $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\theta = 0$ d'ordre n, m, k respectivement, on aura aussi

$$\frac{d \log \psi}{dx} = \mathrm{A}m + \mathrm{B}, \qquad \frac{d \log \theta}{dx} = \mathrm{A}k + \mathrm{B};$$

en éliminant les quantités A et B entre ces trois équations, par un déterminant, on obtient immédiatement

$$\frac{d\log\varphi}{dx}(m-k)+\frac{d\log\psi}{dx}(k-n)+\frac{d\log\theta}{dx}(n-m)=0,$$

d'où, en intégrant

$$\varphi^{m-k}\psi^{k-n}\theta^{n-m}=\text{const.} \tag{16}$$

Nous obtenons donc ainsi un *invariant* pour le système (II) de caractéristiques.

En particulier, si l'on connaît deux équations du même ordre telles que φ, soient $\varphi=0$ et $\theta=0$, on aura

$$\frac{d\log\varphi}{dx}=\mathrm{A}n+\mathrm{B},$$

$$\frac{d\log\theta}{dx}=\mathrm{A}n+\mathrm{B},$$

d'où

$$\frac{\varphi}{\theta}=\text{const.}$$

et l'on obtient ainsi un invariant; bien entendu, il faut pour cela que les premiers membres des équations en involution soient mis sous la forme (8).

Si l'on connaît quatre équations en involution $\varphi=0$, $\psi=0$, $\theta=0$, $\varpi=0$, d'ordres n, m, k, h respectivement, on pourra associer ψ, θ, ϖ, et l'on formera ainsi un deuxième invariant qui sera évidemment distinct du premier si φ et ζ sont distincts. *On pourra donc intégrer l'équation proposée par la méthode de M. Darboux.*

Parmi les quatre invariants qu'on peut former en associant les premiers membres φ, ψ, θ, ϖ, trois à trois, il n'y en a que deux distincts. Ainsi, par exemple, les trois invariants

$$\mathrm{I}_1=\varphi^{m-k}\psi^{k-n}\theta^{n-m},$$

$$\mathrm{I}_2=\psi^{k-h}\theta^{h-m}\varpi^{m-k},$$

$$\mathrm{I}_3=\theta^{h-n}\varpi^{n-k}\varphi^{k-h}$$

ne sont pas distincts; on vérifie immédiatement qu'il existe la relation

$$\mathrm{I}_1^{h-k}\mathrm{I}_2^{k-n}\mathrm{I}_3^{m-k}=1.$$

On associera donc ces premiers membres, de manière à rendre le résultat le plus simple possible.

4. Considérons maintenant un invariant d'ordre quelconque

$$\pi(x, y, z, p_{0,1}, \ldots, p_{0,n}, p_{1,0}, \ldots, p_{1,n-1}) = h. \tag{17}$$

Si nous donnons à h deux valeurs différentes, h_1 et h_2, nous obtenons deux équations,

$$\pi = h_1, \qquad \pi = h_2,$$

qui n'ont évidemment aucune intégrale commune ; donc ces équations ne peuvent être conséquences d'une même troisième $\varpi = 0$, car elles admettraient, dans ce cas, comme intégrales communes, toutes les intégrales de cette dernière

Supposons, maintenant, que l'ordre de l'invariant soit supérieur à trois et soient h_1 et h_2 deux valeurs de h différentes. On peut écrire les équations

$$\pi = h_1, \qquad \pi = h_2$$

sous la forme

$$p_{1,n-1} + m_1 p_{0,n} + u_1(x, y, z, p_{0,1}, \ldots, p_{0,n-1}, p_{1,0}, \ldots, p_{1,n-2}) = 0,$$
$$p_{1,n-1} + m_1 p_{0,n} + u_2(x, y, z, p_{0,1}, \ldots, p_{0,n-1}, p_{1,0}, \ldots, p_{1,n-2}) = 0.$$

D'après ce qui a été démontré au paragraphe précédent, ces deux équations étant distinctes, le quotient de leurs premiers membres sera un invariant d'ordre n

$$\frac{p_{1,n-1} + m_1 p_{0,n} + u_1}{p_{1,n-1} + m_2 p_{0,n} + u_2} = k,$$

qui peut s'écrire encore, par une transformation bien connue, et en changeant la constante

$$\frac{p_{1,n-1} + m_1 p_{0,n} + u_1}{u_2 - u_1} = k. \tag{18}$$

On remarquera que cette forme est linéaire par rapport aux dérivées d'ordre n.

Nous allons voir que cet invariant n'est pas distinct de celui dont nous sommes partis $\pi = h$. Considérons, en effet, une caractéristique d'ordre n du système (II), appartenant à l'équation proposée ; sur cette caractéristique y, z et les dérivées $p_{i,k}$ sont des fonctions de la seule variable x : si nous transportons ces valeurs dans π et dans le premier membre de (18), ces fonctions sont indépendantes de x et se réduisent, l'une à une valeur numérique h, l'autre à une valeur numérique k ; il existe, entre ces valeurs numériques h et k, une correspondance manifeste qui se traduit par une relation de la forme $k = f(h)$; d'autre part, on voit facilement, en tenant compte des équations qui expriment que π est un invariant, que π est de la forme [1] :

$$\pi(p_{1,n-1} + m_1 p_{0,n}; x, y, z, p_{0,1}, \ldots, p_{0,n-1}, p_{1,0}, \ldots, p_{1,n-2}).$$

De l'équation (18), on tire

$$p_{1,n-1} + m_1 p_{0,n} = (u_2 - u_1) f(h) - u_1,$$

en transportant cette valeur dans l'équation (17), et en tenant compte de la forme de π par rapport aux dérivées d'ordre n, il vient

$$(19)\quad \pi[(u_2 - u_1) f(h) - u_1; x, y, z, p_{0,1}, \ldots, p_{0,n-1}, p_{1,0}, \ldots, p_{1,n-2}] = h,$$

relation qui doit être vérifiée identiquement sur toute caractéristique d'ordre n du système (II). Si cette relation contient effectivement h, elle peut s'écrire

$$\varphi(x, y, z, p_{0,1}, \ldots, p_{0,n-1}, p_{1,0}, \ldots, p_{1,n-2}) = h$$

et l'on voit que φ est un invariant d'ordre inférieur à n. Donc l'invariant π s'exprime en fonction de l'invariant (18) et d'un invariant d'ordre inférieur : c'est ce qu'on exprime en disant que les invariants (17) et (18) ne sont pas distincts.

Si la relation (19) ne contient pas h, elle se réduit à une expression

$$\varphi(x, y, z, p_{0,1}, \ldots, p_{0,n-1}, p_{1,0}, \ldots, p_{1,n-2}) = 0,$$

qui est identiquement nulle sur toute caractéristique d'ordre n du système (II) ; si elle est identiquement nulle, π s'exprime en fonction de l'invariant (18) ; sinon elle constitue encore un invariant d'ordre inférieur à n et le raisonnement s'achève comme précédemment.

---

[1] *Voir* GOURSAT, *Leçons sur l'intégration*, etc., t. II, p. 150.

Nous avons donc démontré la proposition suivante :

Tout invariant n d'ordre supérieur à trois peut se mettre sous la forme

$$(20)\quad \frac{p_{1,n-1}+m_1 p_{0,n}+u(x, y, z, p_{0,1}, \ldots, p_{0,n-1}, p_{1,0}, \ldots, p_{1,n-2})}{v(x, y, z, p_{01}, \ldots, p_{0,n-1}, p_{1,0}, \ldots, p_{1,n-2})}=k,$$

linéaire par rapport aux dérivées d'ordre n.

Ce résultat permet de simplifier considérablement la recherche des invariants de l'équation proposée. M. Goursat ([1]) l'avait déjà énoncé au sujet des équations de la forme particulière

$$s=f(x, y, z, p, q).$$

Si l'on considère deux invariants d'ordre supérieur à trois, en mettant l'un d'eux sous la forme (20) on pourra appliquer, sans y rien changer, le raisonnement que nous avons fait pour démontrer que les invariants (17) et (18) n'étaient pas distincts. Cela prouve que deux invariants du même ordre ne sont jamais distincts lorsque cet ordre est supérieur à trois. Ce fait a été d'ailleurs démontré, au moyen d'une méthode différente, par M. Goursat ([2]).

5. De toute façon, on voit qu'on peut substituer à la recherche des invariants d'ordre supérieur à trois, celle des équations en involution avec la proposée; or, le premier membre d'une équation en involution pouvant toujours être mis sous la forme (8), sa structure, par rapport aux dérivées d'ordre supérieur, est beaucoup plus simple que celle d'un invariant; il s'ensuit que l'équation aux dérivées partielles à intégrer se ramène aussi à une forme plus simple.

Ce fait sera, d'ailleurs, mis en évidence d'une manière beaucoup plus nette dans le Chapitre suivant, au sujet des équations de la forme

$$s=f(x, y, z, p, q).$$

([1]) *Annales de la Faculté de Toulouse*, 2e série, t. I, 1899, 1er Mémoire.

([2]) GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. II, p. 152.

6. Nous avons constamment supposé, jusqu'ici, que l'ordre de l'invariant ou de l'équation en involution considérés était supérieur à trois. Lorsque cet ordre est inférieur ou égal à trois, les raisonnements déjà faits ne s'appliquent plus et les résultats sont notablement modifiés; mais, comme il est toujours possible, au moyen d'un nombre fini d'opérations, de voir si une équation donnée $r+f=0$ admet un invariant d'ordre inférieur ou égal à trois, les modifications en question n'ont théoriquement qu'une importance tout à fait secondaire.

Supposons, par exemple, qu'on connaisse une équation en involution avec la proposée du troisième ordre, elle sera de la forme

$$\varphi = p_{1,2} + m_1 p_{0,3} + u(x, y, z, p_{1,0}, p_{1,1}, p_{0,1}, p_{0,2}), \tag{21}$$

avec la condition

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + m_2\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) - \left(\frac{d^2 f}{dy^2}\right) = 0, \tag{22}$$

qui doit être vérifiée identiquement lorsqu'on y fait $p_{1,2} = -m_1 p_{0,3} - u$.

Or, on a ici

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = p_{0,3}\left[\frac{dm_1}{dx}\right] + \frac{\partial u}{\partial p_{0,2}} p_{1,2} - \left[\frac{df}{dy}\right]\frac{\partial u}{\partial p_{1,1}} + \left(\frac{du}{dx}\right),$$
$$\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) = p_{0,3}\left[\frac{dm_1}{dy}\right] + \frac{\partial u}{\partial p_{0,2}} p_{0,3} + \frac{\partial u}{\partial p_{1,1}} p_{1,2} + \left(\frac{du}{dy}\right);$$

en outre, m_1 et m_2 étant fonctions des dérivées du second ordre, on a

$$\left[\frac{dm_1}{dx}\right] = \frac{\partial m_1}{\partial p_{0,2}} p_{1,2} - \frac{\partial m_1}{\partial p_{1,1}}\left[\frac{df}{dy}\right] + \left(\frac{dm_1}{dx}\right),$$
$$\left[\frac{dm_1}{dy}\right] = \frac{\partial m_1}{\partial p_{0,2}} p_{0,3} + \frac{\partial m_1}{\partial p_{1,1}} p_{1,2} + \left(\frac{dm_1}{dy}\right).$$

Enfin, on a vu précédemment qu'on a

$$\left[\frac{df}{dy}\right] = \frac{\partial f}{\partial t} p_{0,3} + \frac{\partial f}{\partial s} p_{1,2} + \mathrm{H},$$
$$\left(\frac{d^2 f}{dy^2}\right) = p_{0,3}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2 p_{0,3} p_{1,2} \frac{\partial^2 f}{\partial s\,\partial t} + p_{1,2}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + \mathrm{E} p_{0,3} + \mathrm{F} p_{1,2} + \mathrm{G},$$

en posant

$$E = \left(\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial t}\right) + \frac{\partial H}{\partial t}, \qquad F = \left(\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial s}\right) + \frac{\partial H}{\partial s}, \qquad G = \left(\frac{dH}{dy}\right).$$

En transportant toutes ces expressions dans l'équation (21), on obtient au premier membre un polynome du second degré en $p_{0,3}$, $p_{1,2}$. Si l'on fait alors $p_{1,2} = -m_1 p_{0,3} - u$, on constate facilement que le terme en $p_{0,3}^2$ est identiquement nul, en vertu de l'identité

$$\frac{\partial}{\partial s}(m_1 m_2) - \frac{\partial}{\partial t}(m_1 + m_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial s\, \partial t}.$$

En égalant à zéro le coefficient de $p_{0,3}$, on obtient l'équation

$$\begin{aligned} &u\left(\frac{\partial m_1}{\partial s} m_1 - \frac{\partial m_1}{\partial t}\right) + \left(\frac{dm_1}{dx}\right) + m_2\left(\frac{dm_1}{dy}\right) + m_2 \frac{\partial u}{\partial p_{0,2}} - \frac{\partial u}{\partial p_{1,1}}\frac{\partial f}{\partial t} \\ &- \frac{\partial m_1}{\partial s} H - m_1\left(\frac{\partial u}{\partial p_{0,2}} - m_1 \frac{\partial u}{\partial p_{1,1}}\right) + 2u\frac{\partial^2 f}{\partial s\, \partial t} - 2m_1 u \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} - E + F m_1 = 0, \end{aligned}$$

qui est de la forme

$$(m_2 - m_1)\left(\frac{\partial u}{\partial p_{0,2}} - m_1 \frac{\partial u}{\partial p_{1,1}}\right) = uI + K, \tag{23}$$

en posant

$$I = m_1 \frac{\partial m_1}{\partial s} - 2m_2 \frac{\partial m_1}{\partial s} + \frac{\partial m_1}{\partial t},$$

$$K = E - F m_1 - \left(\frac{dm_1}{dx}\right) - m_2\left(\frac{dm_1}{dy}\right) + \frac{\partial m_1}{\partial s} H.$$

Cela posé, supposons encore qu'on se déplace sur une caractéristique du troisième ordre du système (II); dans ces conditions φ devient une fonction de la seule variable x dont la dérivée est, comme dans le cas général,

$$\frac{d\varphi}{dx} = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + m_2\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) - \left(\frac{d^2 f}{dy^2}\right),$$

remplaçons dans le second membre $p_{1,2}$ par $\varphi - m_1 p_{0,3} - u$; on obtiendra, dans ce cas, un polynome du second degré en φ, le terme indépendant de φ étant identiquement nul d'après un raisonnement déjà fait. En faisant le calcul, on trouve facilement

$$\frac{d\varphi}{dx} = \varphi\left[p_{0,3}\left(\frac{\partial m_1}{\partial t} - m_1\frac{\partial m_1}{\partial s}\right) + \frac{\partial u}{\partial p_{0,2}} - m_1\frac{\partial u}{\partial p_{1,1}}\right.$$
$$\left. - 2p_{0,3}\frac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial s} + 2(m_1 p_{0,3} + u)\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} - \mathrm{F}\right] - \varphi^2\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}.$$

Pour obtenir une formule analogue à celle du cas général, il faudra remplacer dans l'expression précédente la quantité $\left(\frac{\partial u}{\partial p_{0,2}} - m_1\frac{\partial u}{\partial p_{1,1}}\right)$ par sa valeur tirée de l'équation (23), puis u par $(\varphi - p_{1,2} - m_1 p_{0,3})$.

On constate alors, sans difficulté, que l'équation précédente se met sous la forme

$$\frac{d\varphi}{dx} = \varphi(3\mathrm{A} + \mathrm{B}) + \mathrm{C}\varphi^2,$$

A et B conservant la même signification que précédemment, et en posant

$$\mathrm{C} = \frac{1}{m_2 - m_1}\left(m_2\frac{\partial m_2}{\partial s} - \frac{\partial m_2}{\partial t}\right).$$

Cette formule diffère de la formule (14) par la présence du terme $\mathrm{C}\varphi^2$. On peut en tirer encore des conséquences intéressantes au point de vue de la recherche des invariants. Posons $-\frac{1}{\varphi} = \lambda$; l'équation précédente prend alors la forme

$$\frac{d\lambda}{dx} = \lambda(3\mathrm{A} + \mathrm{B}) - \mathrm{C}.$$

Si l'on connaît deux équations en involution du troisième ordre mises sous la forme (21), soient $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, en appelant λ_1 et λ_2 les inverses des premiers membres, on aura, sur toute caractéristique de l'équation proposée qui n'est pas située sur une surface intégrale de $\varphi_1 = 0$ ou $\varphi_2 = 0$,

$$\frac{d(\lambda_1 - \lambda_2)}{dx} = (\lambda_1 - \lambda_2)(3\mathrm{A} + \mathrm{B}),$$

la quantité $(\lambda_1 - \lambda_2)$ jouera donc, dans la recherche des invariants, le même rôle que les premiers membres des équations en involution d'ordre supérieur à trois, puisqu'elle satisfait à une équation de la forme (14); au point de vue de la recherche générale des invariants, la connaissance de deux équations en involution du troisième ordre, équivaut à celle d'une équation en involution d'ordre supérieur à trois.

En particulier, si l'on connaît trois équations en involution, mises sous la forme (21), soient $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$, en appelant $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les inverses des premiers membres, on voit immédiatement que l'expression $\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_3}$ est un invariant du troisième ordre pour les caractéristiques du système (II). Cet invariant peut se mettre sous la forme équivalente

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_3} \frac{\varphi_3}{\varphi_2} = k;$$

or on a

$$\varphi_1 = p_{1.2} + m_1 p_{0.3} + u_1, \qquad \varphi_2 = p_{1.2} + m_1 p_{0,3} + u_2, \qquad \varphi_3 = p_{1,2} + m_1 p_{0.3} + u_3;$$

on peut donc écrire l'invariant précédent sous la forme

$$\frac{p_{1.2} + m_1 p_{0,3} + u_3}{p_{1.2} + m_1 p_{0.3} + u_2} \frac{u_1 - u_2}{u_1 - u_3} = k, \tag{24}$$

Réciproquement, étant donné un invariant du troisième ordre

$$\pi(x, y, z, p_{0.1}, p_{0,2}, p_{0,3}, p_{1.0}, p_{1.1}, p_{1,2}) = h,$$

en considérant trois valeurs h_1, h_2, h_3, on en déduira trois équations en involution φ_1, φ_2, φ_3, qui permettront de mettre l'invariant considéré sous la forme (24). Donc :

Tout invariant du troisième ordre peut se mettre sous la forme (24). Cette forme n'est plus linéaire par rapport aux dérivées d'ordre supérieur.

7. Dans le cas où $n \leqq 2$, les résultats sont tout à fait différents. En particulier, une équation en involution du second ordre étant mise sous la forme (8)

$$\varphi = p_{1.1} + \psi(x, y, z, p_{0.1}, p_{0,2}, p_{1,0}),$$

ψ satisfait toujours à l'équation $\frac{\partial\psi}{\partial p_{0,2}} = m_1$; mais, m_1 dépendant des dérivées du second ordre, on ne peut plus en conclure que ψ est linéaire par rapport à $p_{0,2}$.

Les raisonnements précédents doivent donc être complètement modifiés dans ce cas. Comme nous avons surtout en vue la recherche générale des invariants des caractéristiques d'une équation du second ordre et qu'il est facile de voir si une équation donnée admet des invariants d'ordre inférieur ou égal à deux, nous laisserons cette étude de côté.

8. Il est bien clair que tout ce qui a été dit pour les invariants relatifs au système (II) de caractéristiques peut se répéter au sujet du système (I); il suffit de permuter le rôle de m_1 et m_2 dans les raisonnements et de remplacer les équations en involution du système (A) par celles du système (B). On peut donc énoncer la proposition suivante :

Si une équation $r+f=0$ forme un système en involution avec quatre équations distinctes du système (A) *et quatre équations du système* (B), *ces équations étant toutes d'ordre supérieur à trois, chaque système de caractéristiques admet deux invariants distincts et, par suite, l'équation considérée admet une intégrale générale de la première classe.*

On peut remarquer, d'ailleurs, que deux équations en involution du troisième ordre jouent le rôle d'une seule équation d'ordre supérieur et il est facile de modifier dans ce sens l'énoncé précédent.

CHAPITRE II.

LES INVARIANTS DES CARACTÉRISTIQUES DES ÉQUATIONS DE LA FORME $s=f(x, y, z, p, q)$.

1. On peut ramener, ainsi que nous l'avons remarqué, une équation de la forme $s=f(x, y, z, p, q)$ à la forme générale

$$r+f(x, y, z, p, q, s, t)=0;$$

mais comme les raisonnements et les résultats sont particulièrement simples dans ce cas, nous étudierons directement la forme des invariants des caractéristiques de cette équation.

Remarquons tout d'abord que l'équation

$$(1) \qquad s = f(x, y, z, p, q)$$

permet d'exprimer toutes les dérivées $\frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k}$ en fonction de celles de ces dérivées où l'un des indices i ou k est nul (¹), c'est-à-dire, d'une manière plus précise, en fonction de x, y, z, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\ldots$, $\frac{\partial^i z}{\partial x^i}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\ldots$, $\frac{\partial^k z}{\partial y^k}$.

Nous poserons, pour simplifier les notations,

$$\frac{\partial^i z}{\partial x^i} = p_i, \qquad \frac{\partial^k z}{\partial y^k} = q_k,$$

et nous désignerons par $\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right)$ la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f par rapport à x où l'on a exprimé toutes les dérivées partielles de z en fonction de x, y, z, p_1, $\ldots$ p_n, q_1, en partant de la relation (1); on peut immédiatement remarquer qu'on a

$$(2) \qquad \left(\frac{d^n f}{dx^n}\right) = \frac{\partial f}{\partial p} p_{n+1} + F_n(x, y, z, q_1, p_1, p_2, \ldots, p_n).$$

Les caractéristiques de l'équation (1) sont définies par les équations $x =$ const. ou $y =$ const. Nous appellerons *système* (I) de caractéristiques, le système correspondant à $x =$ const. et *système* (II), celui qui correspond à $y =$ const.

On connaît donc toujours un invariant pour chacun des deux systèmes de caractéristiques. Pour qu'on puisse intégrer l'équation par la méthode de M. Darboux, il faut et il suffit qu'il existe un deuxième invariant pour l'un des systèmes de caractéristiques; s'il existe un deuxième invariant pour chacun des deux systèmes, la méthode de M. Darboux réussira pour chacun de ces systèmes et l'intégrale générale de l'équation sera de la première classe.

(¹) GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. II, p. 104.

Considérons un invariant du système (I) : il est facile de voir que cet invariant sera de la forme $\varphi(x, y, z, p_1, p_2, \ldots, p_n)$ s'il est d'ordre n [1]. Dans ces conditions, il est nécessaire et suffisant pour que φ soit un invariant d'ordre n, que l'équation aux dérivées partielles

$$(3) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} + q_1 \frac{\partial\varphi}{\partial z} + f \frac{\partial\varphi}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right) \frac{\partial\varphi}{\partial p_2} + \ldots + \left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right) \frac{\partial\varphi}{\partial p_n} = 0$$

soit vérifiée *identiquement*.

Nous voyons qu'il n'y a pas d'invariant d'ordre zéro, distinct de l'invariant x connu, car si φ est d'ordre zéro, l'équation précédente se réduit à

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} + q \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0,$$

et par suite

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0.$$

On sait, d'autre part [2], que φ peut toujours se mettre sous la forme

$$(4) \qquad \varphi = A(x, y, z, p_1, \ldots, p_{n-1}) p_n + B(x, y, z, p_1, \ldots, p_{n-1}).$$

Si nous portons cette expression dans l'équation (3), en tenant compte de la relation (2), on peut égaler à zéro le coefficient de p_n et le terme indépendant de p_n :

$$(5) \quad \frac{\partial A}{\partial y} + q_1 \frac{\partial A}{\partial z} + f \frac{\partial A}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right) \frac{\partial A}{\partial p_2} + \ldots + \left(\frac{d^{n-2} f}{dx^{n-2}}\right) \frac{\partial A}{\partial p_{n-1}} + A \frac{\partial f}{\partial p} = 0.$$

$$(6) \quad \frac{\partial B}{\partial y} + q_1 \frac{\partial B}{\partial z} + f \frac{\partial B}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right) \frac{\partial B}{\partial p_2} + \ldots + \left(\frac{d^{n-2} f}{dx^{n-2}}\right) \frac{\partial B}{\partial p_{n-1}} + A F_{n-1} = 0.$$

Ces conditions sont nécessaires et suffisantes pour que $\varphi = A p_n + B$ soit un invariant d'ordre n, du système (I).

2. Nous allons, maintenant, établir la condition pour qu'une équation aux dérivées partielles forme avec (1) un système en involution.

---

(1) GOURSAT, *Leçons sur l'intégration*, etc., t. II, p. 106.

(2) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. I, 1899 : Mémoire de M. Goursat, p. 163.

Tout d'abord, cette équation ne doit dépendre que de $x, y, z, p_1 \dots p_m$ ou de $x, y, z, q_1 \dots q_m$ [1]; nous dirons qu'elle correspond au système (I) de caractéristiques dans le premier cas, au système (II) dans le deuxième. Prenons une équation du système (I); si elle est d'ordre m, on pourra la résoudre par rapport à p_m et l'écrire sous la forme

$$(7) \qquad p_m + \psi(x, y, z, p_1, \dots p_{m-1}) = 0,$$

que nous appellerons *forme réduite*. Dans ces conditions, on doit avoir, en supposant $m > 1$,

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} + q_1\frac{\partial\psi}{\partial z} + f\frac{\partial\psi}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial\psi}{\partial p_2} + \dots + \left(\frac{d^{m-2}f}{dx^{m-2}}\right)\frac{\partial\psi}{\partial p_{m-1}} + \left(\frac{d^{m-1}f}{dx^{m-1}}\right) = 0,$$

en tenant compte de l'équation (7) elle-même. Comme cette dernière équation ne contient qu'un seul terme en p_m, on devra donc avoir identiquement, en appelant F_{m-1} la fonction correspondante à F_n dans la formule (2),

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} + q_1\frac{\partial\psi}{\partial z} + f\frac{\partial\psi}{\partial p_1} + \dots + \left(\frac{d^{m-2}f}{dx^{m-2}}\right)\frac{\partial\psi}{\partial p_{m-1}} + F_{m-1} = \psi\frac{\partial f}{\partial p_1}.$$

Cette condition se met sous une forme simple, en ajoutant aux deux membres le terme $p_m\dfrac{\partial f}{\partial p_1}$,

$$(8) \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} + q_1\frac{\partial\psi}{\partial z} + f\frac{\partial\psi}{\partial p_1} + \dots + \left(\frac{d^{m-2}f}{dx^{m-2}}\right)\frac{\partial\psi}{\partial p_{n-1}} + \left(\frac{d^{m-1}f}{dx^{m-1}}\right) = (p_m + \psi)\frac{\partial f}{\partial p_1}.$$

Pour que l'équation (7) forme avec (1) un système en involution, il faut et il suffit que la condition (8) soit vérifiée identiquement.

3. Cela posé, considérons les équations (5) et (6) qui déterminent A et B, et posons $B = \theta A$; comme $A \neq 0$, par hypothèse, on constate facilement, en tenant compte de la relation (5), que l'équation (6) prend la forme

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} + q_1\frac{\partial\theta}{\partial z} + f\frac{\partial\theta}{\partial p_1} + \dots + \left(\frac{d^{n-2}f}{dx^{n-2}}\right)\frac{\partial\theta}{\partial p_{n-1}} + F_{n-1} = \theta\frac{\partial f}{\partial p_1}$$

[1] GOURSAT, *Leçons sur l'intégration*, etc., t. II, p. 106.

ou encore, en ajoutant $p_n \frac{\partial f}{\partial p_1}$ aux deux membres,

$$(9)\quad \frac{\partial \theta}{\partial x} + q_1 \frac{\partial \theta}{\partial z} + f \frac{\partial \theta}{\partial p_1} + \ldots + \left(\frac{d^{n-2} f}{dx^{n-2}}\right) \frac{\partial \theta}{\partial p_{n-1}} + \left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right) = (p_n + \theta) \frac{\partial f}{\partial p_1}.$$

Ce qui montre que l'équation $p_n + \theta = 0$ forme avec la proposée un système en involution. D'autre part, M. Goursat a déjà montré ([1]) que de la relation (5) on déduit, en appelant m l'ordre maximum des dérivées entrant effectivement dans le terme A, et en supposant $m > 1$,

$$A = \frac{X(x)}{p_m + \psi(x, y, z, p_1, \ldots, p_{m-1})},$$

X, étant une fonction de la seule variable x, est donc lui-même un invariant et l'on peut prendre $X = 1$: en outre, $p_m + \psi$ vérifie identiquement la condition (8), ce qui prouve que l'équation $p_m + \psi = 0$ forme également un système en involution avec l'équation (1). On a donc le résultat suivant :

Tout invariant du système (1), *dont le terme* A *dépend des dérivées d'ordre supérieur à* 1 *est de la forme* $\varphi = \frac{p_n + \theta}{p_m + \psi}$, $p_n + \theta = 0$ *et* $p_m + \psi = 0$ *étant deux équations formant chacune avec l'équation* (1) *un système en involution.*

Réciproquement : Si l'on a deux équations mises sous forme réduite $p_m + \theta = 0$ *et* $p_m + \psi = 0$ *formant chacune avec l'équation* (1) *un système en involution, l'expression* $\varphi = \frac{p_n + \theta}{p_m + \psi}$ *est un invariant pour le système* (1) *de caractéristiques, en supposant toutefois* m *et* n *supérieurs à l'unité.*

En effet, si $m < n$, par exemple, en posant $A = \frac{1}{p_m + \psi}$ et $B = A\theta$, l'expression $Ap_n + B$ prend la forme indiquée, et les équations (5) et (6) qui sont équivalentes à (8) et (9) sont évidemment vérifiées identiquement.

Si l'on avait $m = n$, on pourrait voir facilement que l'équation (3) est encore vérifiée dans ce cas pour $\varphi = \frac{p_n + \theta}{p_m + \psi}$, mais tous ces résultats

([1]) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. I, p. 461.

découlent de l'interprétation géométrique de l'équation (8) : lorsqu'on se déplace sur une caractéristique $x = \text{const.}$, toutes les quantités z, p_1, p_2, ..., p_m, q_1 sont des fonctions de la seule variable y; $p_m + \psi$ devient aussi une fonction de y dont la dérivée a pour expression le premier membre de l'équation (8); cette équation exprime donc que, sur toute caractéristique de système (I), on a

$$\frac{d}{dx}\log(p_m + \psi) = \frac{\partial f}{\partial p}.$$

Le second membre ne dépend que de l'équation proposée et non de ψ; si l'on connaît deux équations en involution avec la proposée et irréductibles, on aura donc sur toute caractéristique du système (I),

$$\frac{d}{dx}\mathrm{L}(p_n + \theta) - \frac{d}{dx}\mathrm{L}(p_m + \psi) = 0,$$

c'est-à-dire que l'expression $\dfrac{p_n + \theta}{p_m + \psi}$ est un invariant.

4. Supposons maintenant que A ne dépende pas des dérivées d'ordre supérieur à 1. En posant toujours $B = A\theta$, θ sera toujours déterminé par une équation de la forme (9); mais A sera déterminé par l'équation

$$\frac{\partial A}{\partial y} + q_1\frac{\partial A}{\partial z} + f\frac{\partial A}{\partial p} + A\frac{\partial f}{\partial p} = 0. \tag{10}$$

Posons $A = \dfrac{1}{A_1}$, on aura identiquement

$$\frac{\partial A_1}{\partial y} + q_1\frac{\partial A_1}{\partial z} + f\frac{\partial A_1}{\partial p_1} = A_1\frac{\partial f}{\partial p_1}. \tag{11}$$

Cette condition montre que la relation $\dfrac{\partial A_1}{\partial y} + q_1\dfrac{\partial A_1}{\partial z} + f\dfrac{\partial A_1}{\partial p_1} = 0$ est une conséquence de $A_1 = 0$: or, c'est là précisément la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $A_1 = 0$ forme un système en involution avec l'équation (1); mais, dans ce cas, A_1 n'est plus le premier membre d'une équation quelconque du premier ordre en involution avec la proposée : il faut, en outre, que la condition (11) soit vérifiée identiquement.

Enfin, si l'on peut trouver une fonction $A_1(x, y, z)$ indépendante des dérivées et vérifiant identiquement la relation,

$$\frac{\partial A_1}{\partial y} + q_1 \frac{\partial A_1}{\partial z} = A_1 \frac{\partial f}{\partial p_1}, \tag{12}$$

tout invariant d'ordre $n > 1$ pourra se mettre sous la forme $\varphi = \frac{p_n + \theta}{A_1(x, y, z)}$ et réciproquement, dès qu'on connaîtra une équation irréductible $p_n + \theta = 0$, formant avec la proposée un système en involution, on en déduira un invariant $\varphi = \frac{p_n + \theta}{A_1}$.

5. Dans les raisonnements précédents, nous avons écarté le cas où l'invariant serait du premier ordre. Nous allons voir qu'il n'y a rien de changé dans ce cas : en effet, l'équation (1) admettra un invariant de la forme $s = A(x, y, z)p_1 + B(x, y, z)$ si l'on a identiquement

$$\left(\frac{\partial A}{\partial y} p_1 + \frac{\partial B}{\partial y}\right) + q_1\left(\frac{\partial A}{\partial z} p_1 + \frac{\partial B}{\partial z}\right) + fA = 0. \tag{13}$$

L'équation (1) doit donc être nécessairement de la forme

$$s = f = \alpha(x, y, z)p_1 q_1 + \beta(x, y, z)p_1 + \gamma(x, y, z)q_1 + \delta(x, y, z). \tag{14}$$

De l'identité (13) on tire

$$\frac{\partial A}{\partial y} + q_1 \frac{\partial A}{\partial z} + A(\alpha q_1 + \beta) = 0,$$

$$\frac{\partial B}{\partial y} + q_1 \frac{\partial B}{\partial z} + A(\gamma q_1 + \delta) = 0.$$

Si l'on pose encore $A = \frac{1}{A_1}$, en remarquant que, dans ce cas, $\frac{\partial f}{\partial p_1} = \alpha q_1 + \beta$, on retrouve les conditions (12).

Si l'on pose $B = A\theta$, on peut mettre la deuxième des relations précédentes sous la forme

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \theta}{\partial z} + f = (p_1 + \theta) \frac{\partial f}{\partial p_1}. \tag{15}$$

C'est une équation de la forme (9), où l'on aurait fait $n = 1$. D'autre part dans le cas où f est de la forme (14), la condition pour que l'équation $p + \theta(x, y, z) = 0$ forme avec (1) un système en involution, peut se mettre sous la forme (15), ainsi qu'il est facile de le vérifier.

Donc les résultats énoncés dans le paragraphe précédent s'étendent sans aucun changement au cas où $n = 1$.

6. En résumé, d'une manière précise, pour trouver un invariant de l'équation proposée, différent de x, on procédera de la manière suivante :

On cherchera d'abord s'il existe une fonction $\Lambda_1(x, y, z, p)$ vérifiant identiquement l'une des équations (11) ou (12) ; s'il en est ainsi il ne restera plus qu'à chercher une équation différente de $\Lambda_1 = 0$ et formant avec (1), un système en involution : en mettant cette équation sous la forme réduite $p_n + \theta = 0$ on aura un invariant

$$\varphi = \frac{p_n + \theta}{\Lambda_1}.$$

S'il n'existe pas de quantité Λ_1 vérifiant les conditions précédentes, on cherchera deux équations d'ordre supérieur à 1 et formant avec la proposée des systèmes en involution. En les mettant sous la forme réduite $p_n + \theta = 0$ et $p_m + \psi = 0$, on aura un invariant

$$\varphi = \frac{p_n + \theta}{p_m + \psi}.$$

7. Il est facile de trouver toutes les équations pour lesquelles il existe une fonction $\Lambda_1(x, y, z)$ vérifiant identiquement la condition (12).

En posant $\Lambda_1 = e^{u(x,y,z)}$ on tire en effet de cette relation

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial u}{\partial z} q + \frac{\partial u}{\partial y},$$

d'où, en intégrant par rapport à p,

$$f = \frac{\partial u}{\partial z} pq + \frac{\partial u}{\partial y} p + v(x, y, z, q).$$

Étant donnée une équation $s = f$, correspondant à la forme précédente du second membre, il suffira de connaître une seule équation en involution pour en déduire un invariant.

Ce résultat s'applique aux équations linéaires,

$$s = a(x, y)p + b(x, y)q + c(x, y)z + d(x, y),$$

étudiées par Laplace; on peut dire, par conséquent : *La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation linéaire*

$$s = ap + bq + cz + d$$

s'intègre par la méthode de Laplace, est qu'il existe une autre équation aux dérivées partielles formant avec celle-ci un système en involution. Cette remarque avait déjà été faite dans ce cas particulier par M. Goursat (¹); on voit qu'elle se rattache à une proposition beaucoup plus générale.

En particulier, si l'on a $\frac{\partial f}{\partial p} = 0$, on peut toujours prendre $A_1 = 1$.

Si f est de la forme $f = u(x, p)v(x, y, z, q)$, l'équation (11) sera identiquement vérifiée en prenant $A = u(x, p)$: il suffira donc encore de connaître une seule équation en involution avec la proposée, d'ordre supérieur à l'unité, pour en déduire un invariant.

8. Nous allons maintenant formuler deux remarques dont l'application simplifie considérablement les calculs dans la recherche des invariants de l'équation (1). Nous aurons d'ailleurs souvent l'occasion d'appliquer ces remarques dans le Chapitre suivant.

Remarque I. — Soit m l'ordre de la fonction $A_1(x, y, z, p_1, p_2, \ldots)$ d'ordre le plus petit qui vérifie identiquement une relation de la forme

$$(16)\quad \frac{\partial A_1}{\partial y} + q_1\frac{\partial A_1}{\partial z} + f\frac{\partial A_1}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial A_1}{\partial p_2} + \ldots + \left(\frac{d^{m-1}f}{dx^{m-1}}\right)\frac{\partial A_1}{\partial p_m} = A_1\frac{\partial f}{\partial p_1},$$

c'est-à-dire de la fonction A_1 qu'on peut prendre comme dénominateur de l'invariant cherché; si l'on sait d'autre part qu'il existe une relation de la forme

$$(17)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial \lambda}{\partial y} + q_1\frac{\partial \lambda}{\partial z} + f\frac{\partial \lambda}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial p_2} + \ldots \\ &\quad + \left(\frac{d^{k-1}f}{dx^{k-1}}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial p_k} + i\lambda\frac{\partial f}{\partial p_1} + \varphi(x, y, z, p_1, \ldots, p_k) = 0. \end{aligned}$$

(¹) *Leçons sur l'intégration*, etc., t. II, p. 182.

où l'on a $k < m$, $\frac{\partial^h \varphi}{\partial p_k^h} \equiv 0$, i étant un nombre entier, positif, négatif ou nul.

Je dis que, si $h + i \neq 0$, on aura aussi $\frac{\partial^h \lambda}{\partial p_k^h} \equiv 0$, c'est-à-dire que λ et φ sont deux polynomes de même degré $h - 1$ par rapport à la variable p_k; si $h + i = 0$, λ est un polynome de degré h, le premier terme étant $X(x) p_k^h$ et pouvant d'ailleurs être nul.

En effet, dérivons l'identité précédente h fois successivement par rapport à p_k; en posant $\frac{\partial^h \lambda}{\partial p_k^h} = \lambda'$ et en tenant compte de la relation (2), il vient

$$(18)\quad \frac{\partial \lambda'}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \lambda'}{\partial z} + f \frac{\partial \lambda'}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right) \frac{\partial \lambda'}{\partial p_2} + \ldots + \left(\frac{d^{k-1} f}{dx^{k-1}}\right) \frac{\partial \lambda'}{\partial p_k} + (h+i) \lambda' \frac{\partial f}{\partial p_1} = 0;$$

si $h + i \neq 0$, on peut poser $\lambda' = u^{-(h+i)}$ et l'équation précédente prend la forme suivante en supprimant le facteur $h + i$:

$$(19)\quad \frac{\partial u}{\partial y} + q_1 \frac{\partial u}{\partial z} + f \frac{\partial u}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right) \frac{\partial u}{\partial p_2} + \ldots + \left(\frac{d^{k-1} f}{dx^{k-1}}\right) \frac{\partial u}{\partial p_k} = u \frac{\partial f}{\partial p_1}.$$

C'est une équation de la forme (16) : comme k est inférieur à m notre hypothèse entraîne $u \equiv 0$, c'est-à-dire

$$\lambda' = \frac{\partial^h \lambda}{\partial p_k^h} \equiv 0.$$

Si $h + i = 0$ l'équation (18) montre que λ' est un invariant d'ordre au plus égal à k; or, d'après l'hypothèse, il ne peut exister d'invariant différent de x et d'ordre inférieur à $m + 1$. Donc

$$\lambda' = \frac{\partial^h \lambda}{\partial p_k^h} = X(x).$$

C. Q. F. D.

En particulier si $\frac{\partial \varphi}{\partial p_k} = 0$, on aura aussi

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p_k} = 0,$$

sauf si $i = -1$; dans ce cas on aura

$$\lambda = X p_k + \lambda_1(x, y, z, p_1, \ldots, p_{k-1}).$$

Remarque II. — Conservons les hypothèses sur lesquelles repose la remarque précédente en supposant toutefois $k > m$; supposons en outre qu'il n'existe aucune autre fonction A_1 vérifiant identiquement la relation (16) et dont l'ordre soit un nombre compris entre m et $k+1$, ce qui revient à supposer que toute équation irréductible, en involution avec la proposée et d'ordre supérieur à m, est d'ordre supérieur à k.

En effectuant les mêmes opérations on trouvera encore la relation (18) : si $h+i \neq 0$, on pourra encore poser $\lambda' = u^{-h+i}$ et l'on retrouvera l'équation (19) qui a la forme (16). Cela n'est possible, dans nos hypothèses, que si l'on a

$$u = X(x)A_1,$$

X pouvant d'ailleurs être nul. Par conséquent λ' sera la forme

$$\lambda' = X(x)A_1^{(h+i)},$$

ce qui montre que λ sera un polynome en p_k, d'ordre h, le premier terme étant $\frac{X(x)}{A_1^{h+i}}p_k^h$.

Si $h+i=0$, l'identité (18) montre que λ' est un invariant d'ordre au plus égal à k. Or, d'après nos hypothèses, l'invariant d'ordre le plus petit sera formé en prenant A_1 comme dénominateur, et comme numérateur le premier membre de l'équation irréductible mise sous forme réduite dont l'ordre doit être supérieur à m et le plus petit possible : nous avons supposé que cet ordre était supérieur à k.

Donc, on aura forcément $\lambda' = X(x)$, X pouvant être nulle identiquement; par suite λ sera encore un polynome de degré h en p_k, le premier terme étant Xp_k^h.

Enfin, si l'on avait $k=m$, les calculs de la remarque (I) montrent que la fonction u est identique à $X(x)A_1$; en effet, si nous posons

$$A_1 = e^v, \qquad u = e^w,$$

les équations (16) et (18) prennent la forme

$$\frac{\partial v}{\partial y} + q_1\frac{\partial v}{\partial z} + f\frac{\partial v}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial v}{\partial p_2} + \ldots + \left(\frac{d^{m-1}f}{dx^{m-1}}\right)\frac{\partial v}{\partial p_m} = \frac{\partial f}{\partial p},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} + q_1\frac{\partial w}{\partial z} + f\frac{\partial w}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial w}{\partial p_2} + \ldots + \left(\frac{d^{m-1}f}{dx^{m-1}}\right)\frac{\partial w}{\partial p_m} = \frac{\partial f}{\partial p}.$$

En retranchant membre à membre les deux relations précédentes, et en posant $\varphi = v - w$, on obtient

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} + q_1 \frac{\partial\varphi}{\partial z} + f\frac{\partial\varphi}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial p_2} + \ldots + \left(\frac{d^{m-1}f}{dx^{m-1}}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial p_m} = 0$$

qui exprime précisément que φ est un invariant d'ordre au plus égal à m; si cet invariant était différent de x, on en déduirait qu'il existe une fonction A_1 d'ordre inférieur à m, vérifiant une identité de la forme (16), ce qui est contraire à l'hypothèse; donc on a

$$\varphi \equiv v - w \equiv \operatorname{Log}\frac{A_1}{u} \equiv X(x),$$

d'où

$$u \equiv A_1 X(x),$$

X n'étant pas la même fonction que dans l'égalité précédente. Dans ce cas, on aura donc

$$\lambda' = \frac{\partial^h \lambda}{\partial p_k^h} = \frac{X(x)}{A^{h+i}}.$$

Comme A_1 dépend de p_k, λ n'est plus forcément un polynome en p_k.

9. Nous allons maintenant étudier les expressions $\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right)$ qui forment les coefficients de l'équation aux dérivées partielles (8) qui détermine les équations en involution avec l'équation proposée.

On a d'abord

$$(20)\quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = p_2\frac{\partial f}{\partial p_1} + \frac{\partial f}{\partial x} + p_1\frac{\partial f}{\partial z} + f\frac{\partial f}{\partial q_1} = p_2\frac{\partial f}{\partial p_1} + H(x, y, z, p_1, q_1),$$

puis

$$\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) = p_3\frac{\partial f}{\partial p_1} + p_2\left[\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p_1}\right) + \frac{\partial H}{\partial p_1}\right] + \frac{\partial H}{\partial x} + p_1\frac{\partial H}{\partial z} + f\frac{\partial H}{\partial q_1}$$

qui est de la forme

$$(21)\quad \left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) = p_3\frac{\partial f}{\partial p_1} + p_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2} + p_2\alpha(x, y, z, p_1, q_1) + \beta(x, y, z, p_1, q_1)$$

avec

$$(22)\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{\partial^2 f}{\partial p_1\,\partial x} + p_1\dfrac{\partial^2 f}{\partial p_1\,\partial z} + f\dfrac{\partial^2 f}{\partial p_1\,\partial q_1} + \dfrac{\partial H}{\partial p_1}, \\ \beta = \dfrac{\partial H}{\partial x} + p_1\dfrac{\partial H}{\partial z} + f\dfrac{\partial H}{\partial q_1}; \end{cases}$$

écrivons encore

$$(23)\quad \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right) = p_4\frac{\partial f}{\partial p_1} + p_3\left[\left(\frac{d}{dx}\,\frac{\partial f}{\partial p_1}\right) + 2\,p_2\frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2} + \alpha\right] + K_3(x, y, z, p_1, q_1, p_2).$$

Cette expression est linéaire par rapport à p_3 et p_4; le coefficient de p_4 ne dépend que des dérivées du premier ordre, tandis que celui de p_3 dépend de p_2.

Je dis qu'on a, d'une manière générale,

$$(24)\quad \left(\frac{d^n f}{dx^n}\right) = p_{n+1}\frac{\partial f}{\partial p_1} + p_n M_n^n + p_{n-1}M_n^{n-1} + \ldots$$
$$+ p_k M_n + K_n(x, y, z, q_1, p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}),$$

les coefficients M étant indépendants de $p_{n+1}, p_n \ldots p_k$, et l'ordre maximum des dérivées contenues dans M_n^h étant $n-h+2$.

En effet, supposons que cette propriété soit vraie jusqu'à l'ordre n inclusivement; en partant de la relation (24), on aura

$$\left(\frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}\right) = p_{n+2}\frac{\partial f}{\partial p_1} + p_{n+1}\left[\left(\frac{d}{dx}\,\frac{\partial f}{\partial p}\right) + M_n^n\right] + p_n\left[\left(\frac{dM_n^n}{dx}\right) + M_n^{n-1}\right] + \ldots$$
$$+ p_{k+1}\left[\left(\frac{dM_n^{k+1}}{dx}\right) + M_n^k\right] + p_k\left[\left(\frac{dM_n^k}{dx}\right) + \frac{\partial K_n}{\partial p_{k-1}}\right] + \ldots.$$

Cette expression est bien de la forme

$$(24)'\quad \left(\frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}\right) = p_{n+2}\frac{\partial f}{\partial p_1} + M_{n+1}^{n+1} p_{n+1} + M_{n+1}^n p_n + \ldots$$
$$+ p_{k+1}M_{n+1}^{k+1} + p_k M_{n+1}^k + K_{n+1}(x\, y, z, q_1, p_1, \ldots, p_{k-1})$$

et l'on a

$$M_{n+1}^{h+1} = \left(\frac{dM_n^{h+1}}{dx}\right) + M_n^h.$$

Si h est supérieur à k, M_n^{h+1} ne contient pas de dérivée d'ordre h et par suite M_{n+1}^{h+1} ne contient pas la dérivée p_{h+1}. D'autre part, l'ordre maximum des dérivées contenues dans le coefficient M_{n+1}^{h+1} d'après l'expression précédente est encore $n-h+2$ qui peut s'écrire $(n+1)-(h+1)+2$. Donc l'expression précédente est linéaire par rapport aux dérivées $p_{n+2}, \ldots, p_{k+1}$; si le terme M_n^k dépend de p_{k-1}, le coefficient M_{n+1}^k dépendra de p_k et par suite il faudra faire entrer le terme $p_k M_{n+1}^k$ dans le terme K_{n+1} afin de conserver la forme (24); mais ce fait découle aussi immédiatement de l'application de la règle $n-h+2$; en effet, puisque M_n^k dépend de p_{k-1}, on a par hypothèse

$$n-k+2 \geqq k-1,$$

donc

$$(n+1)-k+2 \geqq k,$$

ce qui montre que le coefficient M_{n+1}^k dans l'expression $(24)'$ peut dépendre de p_k et que nous devons le faire entrer dans le terme K_{n+1}.

Si au contraire, M_n^k ne dépendait pas de p_{k-1}, on a

$$n-k+2 < k-1,$$
$$(n+1)-k+2 < k.$$

et l'expression $(24)'$ est encore linéaire par rapport à p_k.

Donc la forme (24) est générale; il faudra s'arrêter au terme p_k, k étant *le plus petit nombre* qui vérifie l'inégalité

$$n+2-k < k,$$

d'où

$$k > \frac{n+2}{2};$$

si n est pair, en posant $n = 2n'$ on aura $k > n'+1$, donc il faudra prendre $k = n'+2$. Si n est impair, en posant $n = 2n'+1$ on aura $k > n' + \frac{3}{2}$; donc il faudra prendre encore $k = n'+2$.

Les coefficients M se calculent facilement par voie de récurrence d'après la formule

$$M_{n+1}^{h+1} = \left(\frac{dM_n^{h+1}}{dx}\right) + M_n^h.$$

Nous allons chercher l'expression du premier M_n^n dont nous aurons besoin dans la suite. On a

$$M_n^n = \left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p_1}\right) + M_{n-1}^{n-1},$$

on en tire facilement

$$M_n^n = (n-3)\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p_1}\right) + M_3^3.$$

Or, d'après la formule (23), on a

$$M_3^3 = \left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p_1}\right) + 2\,p_2\frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2} + \alpha.$$

Si l'on tient compte de la valeur de α, on trouve finalement

$$M_n^n = n\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p_1}\right) + \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}. \tag{25}$$

Cette expression est valable pour $n > 2$.

10. Voici une première application des remarques précédentes.

Étant donnée une équation $s = f(x, y, z, p, q)$, supposons qu'il n'existe aucune fonction A_1 vérifiant identiquement l'équation (16) lorsque $m \leqq 2$: il est toujours facile de voir s'il en est ainsi. Dans ce cas, nous savons que le dénominateur d'un invariant quelconque, autre que x, du système (I), sera le premier membre de l'équation irréductible $p_m + \psi = 0$ d'ordre le plus petit possible, formant avec la proposée, un système en involution ; et l'on aura identiquement

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} + q_1\frac{\partial\psi}{\partial z} + f\frac{\partial\psi}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial\psi}{\partial p_2} + \ldots$$
$$+ \left(\frac{d^{m-2}f}{dx^{m-2}}\right)\frac{\partial\psi}{\partial p_{m-1}} + \left(\frac{d^{m-1}f}{dx^{m-1}}\right) = (p_m + \psi)\frac{\partial f}{\partial p_1} \qquad (m > 1).$$

Cette relation, en fait, ne contient pas p_m. Dérivons les deux membres par rapport à p_{m-1}, en posant $\dfrac{\partial\psi}{\partial p_{m-1}} = \psi'$, il vient

$$\frac{\partial\psi'}{\partial y} + q_1\frac{\partial\psi'}{\partial z} + f\frac{\partial\psi'}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial\psi'}{\partial p_2} + \ldots$$
$$+ \left(\frac{d^{m-2}f}{dx^{m-2}}\right)\frac{\partial\psi'}{\partial p_{m-1}} + M_{m-1}^{m-1} = 0,$$

à condition toutefois que $m - 1 > 1$, c'est-à-dire $m > 2$, ce que nous avons supposé.

Comme M_{m-1}^{m-1} est une fonction linéaire de p_2, ne dépendant pas des dérivées d'ordre supérieur à 2, et qu'il n'existe d'autre part aucune équation d'ordre inférieur à m, formant avec la proposée un système en involution, l'application de la remarque (I) montre que ψ' ne dépend pas des dérivées d'ordre supérieur à 2 et qu'on a

$$\psi' = \psi_1(x, y, z, p_1)p_2 + \psi_2(x, y, z, p_1)$$

avec

$$\begin{aligned}(26)\qquad &\frac{\partial\psi'}{\partial y} + q_1\frac{\partial\psi'}{\partial z} + f\frac{\partial\psi'}{\partial p_1} + \psi_1\left(\frac{df}{dx}\right)\\ &\quad + (m-1)\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p_1}\right) + \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q} \equiv 0.\end{aligned}$$

De cette identité on peut tirer plusieurs conditions; en particulier on a une relation simple en égalant à zéro le coefficient de p_2 :

$$(27)\qquad \frac{\partial\psi_1}{\partial y} + q_1\frac{\partial\psi_1}{\partial z} + f\frac{\partial\psi_1}{\partial p_1} + \psi_1\frac{\partial f}{\partial p_1} + (m-1)\frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2} = 0;$$

on peut donc énoncer le résultat suivant :

Une équation $s = f(x, y, z, p, q)$ étant donnée, si l'on a constaté que l'équation (16) *ne peut être vérifiée pour $m = 0$, $m = 1$, $m = 2$, ce qui est toujours possible au moyen d'un nombre fini d'opérations, pour que cette équation forme un système en involution avec une autre équation du système* (I), *il est nécessaire que f vérifie la condition* (26) *et en particulier la condition plus simple* (27).

On a donc là une condition nécessaire dont la vérification n'exige qu'un nombre fini d'opérations; on posera $\psi_1 = (m-1)\alpha(x, y, z, p_1)$ et il faudra que le système

$$\frac{\partial\alpha}{\partial q_1} = 0, \qquad \frac{\partial\alpha}{\partial y} + q_1\frac{\partial\alpha}{\partial z} + f\frac{\partial\alpha}{\partial p_1} + \alpha\frac{\partial f}{\partial p_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2} = 0$$

soit compatible.

On aura encore une autre condition nécessaire en égalant à zéro, le terme indépendant de p_2 dans l'identité (26)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\psi_2}{\partial y} + q_1\frac{\partial\psi_2}{\partial z} + f\frac{\partial\psi_2}{\partial p_1} + \psi_1\left[\frac{\partial f}{\partial x} + p_1\frac{\partial f}{\partial z} + f\frac{\partial f}{\partial q_1}\right]\\ &\quad + (m-1)\left[\frac{\partial^2 f}{\partial p_1\,dx} + p_1\frac{\partial^2 f}{\partial p_1\,\partial z} + f\frac{\partial^2 f}{\partial p_1\,\partial q_1}\right] + \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial f}{\partial q_1} = 0;\end{aligned}$$

mais on ne peut appliquer cette condition que lorsqu'on a fait la vérification de la précédente et qu'on en a tiré l'expression de la fonction ψ_1.

Dans le cas particulier où l'on aurait $\frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2} = 0$, c'est-à-dire

$$f = u(x, y, z, q_1)p_1 + v(x, y, z, q_1),$$

la première condition entraînerait $\alpha \equiv 0$ et il faudrait que le système

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial q_1} = 0,$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial z} + f \frac{\partial \psi_2}{\partial p_1} + (m-1)\left[\frac{\partial u}{\partial x} + p_1 \frac{\partial u}{\partial z} + (up_1 + v)\frac{\partial u}{\partial q_1}\right] + \frac{\partial u}{\partial z} p_1 + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial q_1} = 0$$

soit compatible.

En échangeant le rôle des variables x et y, on aurait de même un criterium nécessaire pour qu'il existe une équation en involution du système (II).

11. Nous aurons besoin, dans le Chapitre suivant, d'une expression plus détaillée de certains coefficients de $\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right)$ dans le cas où f a l'une des deux formes suivantes :

$$f = a(x, y, z)p_1 + b(x, y, z)q_1 + c(x, y, z),$$
$$f = a(x, y, z)p_1 q_1.$$

Afin de n'avoir pas à revenir sur ces calculs, nous allons chercher dans ces deux cas les expressions des coefficients M dont nous aurons à nous servir.

Premier cas : $f = ap + bq + c$. — Dans ce cas on aura, d'après la formule (25),

$$M_n^n = n\left(\frac{da}{dx}\right) + \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q},$$

$$M_n^n = n\left(\frac{\partial a}{\partial x} + p_1 \frac{\partial a}{\partial z}\right) + \frac{\partial a}{\partial z} p_1 + \frac{\partial b}{\partial z} q_1 + \frac{\partial c}{\partial z} + ab. \tag{28}$$

On peut remarquer que dans ce cas M_n^n ne dépend que des dérivées du premier ordre et non de p_2 comme dans le cas général.

Nous allons calculer le coefficient M_n^{n-1} ; pour cela remarquons que l'on a

$$\left(\frac{df}{dx}\right) = ap_2 + \frac{\partial f}{\partial x} + p_1\frac{df}{dz} + bf = ap_2 + \mathrm{H}(x, y, z, p_1, q_1),$$

$$\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) = ap_3 + p_2\left[\left(\frac{da}{dx}\right) + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_1}\right] + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} + p_1\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z} + f\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_1}.$$

Or

$$\left(\frac{da}{dx}\right) + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_1} = 2\frac{\partial a}{\partial x} + 3\,p_1\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial b}{\partial z}q_1 + \frac{\partial c}{\partial z} + ab.$$

Nous voyons que $\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)$ *est linéaire par rapport à* p_2 *et le coefficient de* p_2 *s'obtient en faisant* $n=2$ *dans la formule* (28). Donc, on pourra écrire

$$\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) = ap_3 + \mathrm{M}_2^2\, p_2 + \left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} + p_1\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z} + f\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_1}\right),$$

ce qui n'arrive pas dans le cas général. Nous poserons

$$m(x, y, z, p_1\, q_1) = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} + p_1\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z} + f\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_1};$$

en effectuant les calculs on trouve

$$m = \frac{\partial^2 a}{\partial z^2}p_1^3 + g(x, y, z, q_1)\,p_1^2 + h(x, y, z, q_1)\,p_1 + k(x, y, z, q_1).$$

En posant

$$g = \frac{\partial^2 b}{\partial z^2}q_1 + 2\frac{\partial^2 a}{\partial x\,\partial z} + 2a\frac{\partial b}{\partial z} + b\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2},$$

$$\begin{aligned} h = {} & \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + 2q_1\frac{\partial^2 b}{\partial x\,\partial z} + 2\frac{\partial^2 c}{\partial x\,\partial z} + 2a\frac{\partial b}{\partial x} + b\frac{\partial a}{\partial x} \\ & + 2\frac{\partial b}{\partial z}(bq_1 + c) + b\left(\frac{\partial b}{\partial z}q_1 + \frac{\partial c}{\partial z}\right) + ab^2, \end{aligned}$$

on aura ensuite

$$\left(\frac{d^3 f}{dx^3}\right) = ap_4 + \mathrm{M}_3^3\, p_3 + p_2\left[\left(\frac{d\mathrm{M}_2^2}{dx}\right) + \frac{\partial m}{\partial p_1}\right] + \frac{\partial m}{\partial x} + p_1\frac{\partial m}{\partial z} + f\frac{\partial m}{\partial q_1}$$

qui est de la forme

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right) = ap_4 + \mathrm{M}_3^3\, p_3 + 3\,p_2^2\frac{\partial a}{\partial z} + p_2\, n(x, y, z, p_1, q_1) + l(x, y, z, p_1, q_1)$$

en posant

$$n = \frac{\partial m}{\partial p_1} + \frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial z}q_1 + \frac{\partial c}{\partial z} + ab + 3p_1\frac{\partial a}{\partial z}\right)$$
$$+ p_1\frac{\partial}{\partial z}\left(2\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial z}q_1 + \frac{\partial c}{\partial z} + ab + 3p_1\frac{\partial a}{\partial z}\right) + f\frac{\partial b}{\partial z},$$

$$l = \frac{\partial m}{\partial x} + p_1\frac{\partial m}{\partial z} + f\frac{\partial m}{\partial q_1};$$

enfin on aura

$$\left(\frac{d^4 f}{dx^4}\right) = ap_5 + \mathrm{M}_4^4 p_4 + \mathrm{M}_4^3 p_3 + \mathrm{K}_4(x, y, z, p_1, p_2),$$

avec

$$\mathrm{M}_4^3 = \left(\frac{d\mathrm{M}_3^3}{dx}\right) + 6p_2\frac{\partial a}{\partial z} + n.$$

D'une manière générale, on a

$$\mathrm{M}_n^{n-1} = \left(\frac{d\mathrm{M}_{n-1}^{n-1}}{dx}\right) + \mathrm{M}_{n-1}^{n-2}.$$

On tire de cette relation de récurrence, par un procédé bien connu,

$$(29)\quad \mathrm{M}_n^{n-1} = \left[\frac{d}{dx}(\mathrm{M}_{n-1}^{n-1} + \mathrm{M}_{n-2}^{n-2} + \ldots + \mathrm{M}_3^3)\right] + 6p_2\frac{\partial a}{\partial z} + n(x, y, z, p_1, q_1),$$

$$(30)\quad \mathrm{M}_{n-1}^{n-1} + \mathrm{M}_{n-2}^{n-2} + \ldots + \mathrm{M}_3^3 = \left[\frac{n(n-1)}{2} - 3\right]\left(\frac{da}{dx}\right)$$
$$+ (n-3)\left[\frac{\partial a}{\partial z}p_1 + \frac{\partial b}{\partial z}q_1 + \frac{\partial c}{\partial z} + ab\right],$$

d'après la formule (28). On voit que M_n^{n-1} est un polynome du premier degré en p_2 et l'on aura

$$(31)\qquad \mathrm{M}_n^{n-1} = \frac{n(n+1)}{2}\frac{\partial a}{\partial z}p_2 + \mathrm{N}_n^{n-1}(x, y, z, p_1, q_1);$$

en effectuant les calculs, on obtient

$$(32)\quad \mathrm{N}_n^{n-1} = \frac{\partial^2 a}{\partial z^2}p_1^2\frac{n(n+1)}{2}$$
$$+ p_1\left[n^2\frac{\partial^2 a}{\partial x\,\partial z} + n\left(\frac{\partial^2 b}{\partial z^2}q_1 + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + \frac{\partial(ab)}{\partial z} + a\frac{\partial b}{\partial z}\right)\right] + \mathrm{L}(x, y, z, q_1),$$

L étant une certaine fonction indépendante de p_1.

Deuxième cas : $f = a(x, y, z)p_1 q_1$. — On a tout d'abord, dans ce cas,

$$\left(\frac{df}{dx}\right) = q_1\left[ap_2 + \frac{\partial a}{\partial x}p_1 + \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)p_1^2\right],$$

$$\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) = q_1[ap_3 + P_2^2 p_2 + I p_1^3 + J p_1^2 + K p_1]$$

en posant

$$q_1 P_2^2 = M_2^2 = q_1\left[2\frac{\partial a}{\partial x} + 3p_1\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right],$$

$$I = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right) + a\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right),$$

$$J = 2\frac{\partial^2 a}{\partial x\,\partial z} + 3a\frac{\partial a}{\partial x}, \qquad K = \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}.$$

On voit que, dans ce cas comme dans le précédent, $\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)$ est linéaire par rapport à p_2, ce qui n'arrive pas dans le cas où f est quelconque.

Écrivons encore

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right) = q_1\left[ap_4 + P_3^3 p_3 + 3p_2^2\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right) + R(x, y, z, p_1)\,p_2 + R'(x, y, z, p_1)\right]$$

où l'on a

$$q_1 P_3^3 = M_3^3 = q_1\left[3\frac{\partial a}{\partial x} + 4p_1\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right],$$

$$R = 6Ip_1^2 + p_1\left[5J - a\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial^2 a}{\partial x\,\partial z}\right] + 3K.$$

Enfin

$$\left(\frac{d^4 f}{dx^4}\right) = q_1[ap_5 + P_4^4 p_4 + P_4^3 p_3 + \ldots],$$

les termes non écrits ne contenant pas les dérivées d'ordre supérieur à deux. On a ici

$$q_1 P_4^4 = M_4^4, \qquad P_4^3 = \left(\frac{dP_3^3}{dx}\right) + 6p_2\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right) + R + ap_1 P_3^3.$$

D'une manière générale, on aura

$$\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right) = q_1[ap_{n+1} + p_n P_n^n + p_{n-1} P_n^{n-1} + \ldots].$$

les termes non écrits ne contenant pas de dérivée d'ordre supérieur à $n-2$, à condition qu'on ait $n>3$.

D'après la formule (25) du cas général

$$q_1 P_n^n = M_n^n = n\left(\frac{d(aq_1)}{dx}\right) + \frac{\partial a}{\partial z} p_1 q_1 + a^2 p_1 q_1,$$

d'où

$$P_n^n = n\frac{\partial a}{\partial x} + (n+1) p_1 \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right);$$

en outre, on obtient facilement la relation récurrente

$$P_n^{n-1} = \left(\frac{dP_{n-1}^{n-1}}{dx}\right) + P_{n-1}^{n-2} + ap_1 P_{n-1}^{n-1};$$

on en déduit

$$P_n^{n-1} = \left(\frac{d(P_{n-1}^{n-1} + P_{n-2}^{n-2} + \ldots + P_3^3)}{dx}\right) + ap_1(P_{n-1}^{n-1} + \ldots + P_3^3) + 6p_2\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right) + R.$$

Or

$$P_{n-1}^{n-1} + P_{n-2}^{n-2} + \ldots + P_3^3 = \left[\frac{n(n-1)}{2} - 3\right]\frac{\partial a}{\partial x} + p_1\left[\frac{n(n+1)}{2} - 6\right]\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right);$$

en effectuant le calcul, on trouve

$$\begin{aligned} P_n^{n-1} = {} & \frac{n(n+1)}{2} p_2 \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right) \\ & + \frac{n(n+1)}{2} I p_1^2 + p_1\left[n^2 \frac{\partial^2 a}{\partial x\, \partial z} + \frac{(n+1)(3n-2)}{2} a \frac{\partial a}{\partial x}\right] + \frac{n(n-1)}{2} K, \end{aligned}$$

I et K ayant toujours la même signification.

CHAPITRE III.

ÉTUDE DE L'ÉQUATION $s = a(x, y, z)p + b(x, y, z)q + c(x, y, z)$.

---

1. Je me propose, dans ce Chapitre, d'appliquer les résultats précédents à l'équation

$$(1) \qquad s = a(x, y, z)p + b(x, y, z)q + c(x, y, z)$$

et, en particulier, de déterminer toutes les équations de cette forme qui admettent une intégrale générale de la première classe, au sens qui a été donné à ce terme.

Je supposerai toutefois qu'on a $\frac{\partial a}{\partial z} \neq 0$, $\frac{\partial b}{\partial z} \neq 0$; si l'on avait par exemple $\frac{\partial a}{\partial z} = 0$, un changement de variable de la forme $z' = \omega(x, y) z$ permettrait de ramener l'équation proposée à la forme

$$s = b(x, y, z) q + c(x, y, z);$$

dans ce cas les calculs sont plus compliqués et le nombre des cas à examiner est plus grand à cause de la dissymétrie de l'équation : je me bornerai à énoncer quelques résultats dans un dernier paragraphe ; lorsque a et b sont nuls, l'équation (1) a la forme $s = f(x, y, z)$ et les méthodes de calcul qui vont être développées permettent de retrouver très facilement les résultats de M. Clairin au sujet de cette équation, et de Sophus Lie au sujet de l'équation $s = f(z)$.

Nous nous bornerons donc au cas où a et b dépendent effectivement de la variable z, et nous exprimerons que chacun des deux systèmes de caractéristiques admet un deuxième invariant, autre que x ou y.

Soit φ l'invariant d'ordre minimum, autre que x, du système (I); il sera de la forme

$$\varphi = \frac{p_n + \theta(x, y, z, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1})}{A_1(x, y, z, p_1, \ldots, p_m)} \qquad (m < n).$$

D'après les résultats du Chapitre précédent, nous aurons A_1 en cherchant d'abord s'il existe une fonction $A_1(x, y, z, p_1)$ qui vérifie identiquement la relation

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial A_1}{\partial y} + q_1 \frac{\partial A_1}{\partial z} + (a p_1 + b q_1 + c) \frac{\partial A_1}{\partial p_1} = A_1 a;$$

s'il n'en existe pas, nous savons que A_1 sera de la forme

$$A_1 = p_m + \psi(x, y, z, p_1, \ldots p_{m-1})$$

$p_m + \psi$ étant le premier membre de l'équation irréductible d'ordre le plus petit qui forme avec la proposée un système en involution, et l'on aura identiquement

$$(\mathrm{II})\qquad \frac{\partial\psi}{\partial y}+q_1\frac{\partial\psi}{\partial z}+f\frac{\partial\psi}{\partial p_1}+\left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial\psi}{\partial p_2}+\ldots+\left(\frac{d^{m-2}f}{dx^{m-2}}\right)\frac{\partial\psi}{\partial p_{m-1}}+\left(\frac{d^{m-1}f}{dx^{m-1}}\right)=(p_m+\psi)\frac{\partial f}{\partial p_1}.$$

On voit d'ailleurs que l'équation (I) n'a pas de solution si l'on fait $\frac{\partial A_1}{\partial p_1}=0$, car on en déduirait dans ce cas $\frac{\partial A_1}{\partial z}=0$, $\frac{\partial A_1}{\partial y}=a\,A_1$, ce qui est impossible si $\frac{\partial a}{\partial z}\neq 0$. Donc les invariants de l'équation (1) auront un dénominateur d'ordre au moins égal à l'unité.

En considérant de même l'invariant d'ordre minimum du système (II) on verrait que son dénominateur satisfait à l'une des relations (I)' et (II)' qu'on déduit de (I) et (II) en intervertissant le rôle des variables x et y. On aura donc simultanément l'une des conditions (I)(II) et l'une des conditions (I)' (II)'; il y aura par suite quatre cas à distinguer correspondant aux quatre couples de relations :

(II)(II)', (I)(II)', (II)(I)', (I)(I)';

il est clair d'ailleurs que les deux cas (I)(II)' et (II)(I)' conduiront à des résultats symétriques par rapport à x et y. Il n'y a donc en réalité que trois cas distincts.

Nous allons examiner séparément ces trois cas.

2. *Premier cas : Conditions* (II) *et* (II)'. — Considérons la relation (II),

$$(2)\qquad \frac{\partial\psi}{\partial y}+q_1\frac{\partial\psi}{\partial z}+f\frac{\partial\psi}{\partial p_1}+\ldots+\left(\frac{d^{m-2}f}{dx^{m-2}}\right)\frac{\partial\psi}{\partial p_{m-1}}+\left(\frac{d^{m-1}f}{dx^{m-1}}\right)=(p_m+\psi)\frac{\partial f}{\partial p_1}\qquad (m>1).$$

Par hypothèse, il n'existe aucune fonction A_1 d'ordre inférieur à m, et vérifiant une relation de la forme

$$(3)\qquad \frac{\partial A_1}{\partial y}+q_1\frac{\partial A_1}{\partial z}+f\frac{\partial A_1}{\partial p_1}+\ldots+\left(\frac{d^{k-1}f}{dx^{k-1}}\right)\frac{\partial A_1}{\partial p_k}=\lambda_1\frac{\partial f}{\partial p_1},$$

sans quoi on pourrait prendre A_1 comme dénominateur de l'invariant au lieu de $p_m + \psi$.

Dérivons l'identité (2) par rapport à p_{m-1}, en supposant $m > 2$ et en posant $\frac{\partial \psi}{\partial p_{m-1}} = \psi'$, il vient

$$\frac{\partial \psi'}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \psi'}{\partial z} + f \frac{\partial \psi'}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right) \frac{\partial \psi'}{\partial p_2} + \ldots + \left(\frac{d^{m-2} f}{dx^{m-2}}\right) \frac{\partial \psi'}{\partial p_{m-1}} + M_{m-1}^{m-1} = 0.$$

Nous avons vu que M_{m-1}^{m-1}, dans le cas où f est linéaire par rapport à p et q, ne dépend pas des dérivées d'ordre supérieur à 1; la remarque (I) du Chapitre précédent, montre que ψ' ne peut pas dépendre des dérivées d'ordre supérieur à 1, et l'on a

$$\frac{\partial \psi'}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \psi'}{\partial z} + f \frac{\partial \psi'}{\partial p_1} + M_{m-1}^{m-1} = 0,$$

ou encore, en remplaçant M_{m-1}^{m-1} par sa valeur,

$$(4) \quad \frac{\partial \psi'}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \psi'}{\partial z} + f \frac{\partial \psi'}{\partial p_1} + (m-1) \frac{\partial a}{\partial x} + m p_1 \frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial b}{\partial z} q_1 + \frac{\partial c}{\partial z} + ab = 0.$$

Supposons maintenant $m = 2$, cas que nous avons écarté : l'équation (2) s'écrit

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \psi}{\partial z} + f \frac{\partial \psi}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right) = (p_2 + \psi) \frac{\partial f}{\partial p_1}$$

ou encore

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \psi}{\partial z} + f \frac{\partial \psi}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx} + p_1 \frac{\partial f}{\partial z} + f \frac{\partial f}{\partial q_1}\right) = \psi \frac{\partial f}{\partial p_1}.$$

Posons $\frac{\partial \psi}{\partial p_1} = \psi'$ et dérivons par rapport à p_1 l'identité précédente; on obtient

$$\frac{\partial \psi'}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \psi'}{\partial z} + f \frac{\partial \psi'}{\partial p_1} + \frac{\partial a}{\partial x} + 2 p_1 \frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial b}{\partial z} q_1 + \frac{\partial c}{\partial z} + ab = 0.$$

Cette équation n'est autre que l'équation (4) où l'on aurait fait $m = 2$. Dans tous les cas, on a donc la relation (4). Appliquons à cette relation la remarque (I) : ici $i = 0$ et $h = 2$, donc $h + i \neq 0$

et l'on en déduit que ψ' est de la forme

$$\psi' = \lambda(x, y, z)p_1 + \mu(x, y, z),$$

d'où l'identité

$$\begin{aligned}\frac{\partial\lambda}{\partial y}p_1 + \frac{\partial\mu}{\partial y} + q_1\left[\frac{\partial\lambda}{\partial z}p_1 + \frac{\partial\mu}{\partial z}\right] + (ap_1 + bq_1 + c)\lambda \\ + (m-1)\frac{\partial a}{\partial x} + mp_1\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial b}{\partial z}q_1 + \frac{\partial c}{\partial z} + ab = 0,\end{aligned}$$

et l'on en déduit

$$(5)\qquad \frac{\partial\lambda}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial y} + a\lambda + m\frac{\partial a}{\partial z} = 0,$$

$$(6)\qquad \frac{\partial\mu}{\partial z} + b\lambda + \frac{\partial b}{\partial z} = 0,$$

$$(7)\qquad \frac{\partial\mu}{\partial y} + c\lambda + (m-1)\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial z} + ab = 0.$$

Remarquons maintenant que $\frac{\partial a}{\partial z}$ étant différent de zéro, λ ne peut pas être nul et l'on tire de l'équation (5), en intégrant

$$a = \alpha(x, y)\, e^{\omega(x,y)z} - \frac{\partial \log\omega}{\partial y} \qquad (\alpha \neq 0),$$

avec

$$\lambda = -m\,\omega(x, y).$$

On aurait de même, en raisonnant sur l'équation (II)' comme nous l'avons fait sur l'équation (II),

$$b = \beta(x, y)\, e^{\omega_1(x,y)z} - \frac{\partial \log\omega_1}{\partial x} \qquad (\beta \neq 0).$$

Écrivons maintenant la condition d'intégrabilité entre les équations (6) et (7) en y remplaçant λ par $-m\omega$; il vient

$$(8)\qquad \begin{aligned}\frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + (m-1)\frac{\partial^2 a}{\partial x\,\partial z} + b\frac{\partial a}{\partial z} + a\frac{\partial b}{\partial z} + m\omega\frac{\partial b}{\partial y} \\ = m\omega\frac{\partial c}{\partial z} + \frac{\partial^2 b}{\partial z\,\partial y} - mb\frac{\partial\omega}{\partial y}.\end{aligned}$$

Nous tirerons de même de l'équation (II)' la condition symétrique

$$(9)\qquad \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + (m_1 - 1)\frac{\partial^2 b}{\partial y\,\partial z} + a\frac{\partial b}{\partial z} + b\frac{\partial a}{\partial z} + m_1\omega_1\frac{\partial a}{\partial x} = m_1\omega_1\frac{\partial c}{\partial z} + \frac{\partial^2 a}{\partial z\,\partial x} - m_1 a\frac{\partial \omega_1}{\partial x},$$

en appelant m_1 l'ordre de l'expression $q_{m_1} + \psi_1$ qui satisfait à la relation (II)'.

Retranchons les égalités (8) et (9) membre à membre, il vient

$$(10)\qquad mb\frac{\partial \omega}{\partial y} - m_1 a\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + m\frac{\partial^2 a}{\partial z\,\partial x} + m\omega\frac{\partial b}{\partial y} - m_1\frac{\partial^2 b}{\partial z\,\partial y} - m_1\omega_1\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial c}{\partial z}(m\omega - m_1\omega_1).$$

5. Supposons d'abord $m\omega - m_1\omega_1 \neq 0$; si l'on remplace a et b par les expressions trouvées, on voit qu'on peut tirer de là une relation de la forme

$$(11)\qquad \frac{\partial c}{\partial z} = (Cz + C') + (C_1 z + C'_1)e^{\omega z} + (C_2 z + C'_2)e^{\omega_1 z},$$

les fonctions C étant indépendantes de z. Portons cette expression dans l'équation (8) par exemple : nous devons obtenir une identité en z. En particulier si $\omega + \omega_1 \neq 0$, le terme en $e^{(\omega+\omega_1)z}$ doit avoir un coefficient nul; or ce coefficient est très facile à calculer; il a pour expression $\alpha\beta(\omega + \omega_1)$; comme nous avons supposé $\alpha\beta \neq 0$, il faut donc nécessairement

$$\omega + \omega_1 = 0.$$

Dans ces conditions, si l'on pose $z' = \omega z$, l'équation du second ordre proposée conserve la même forme et l'on a

$$\omega = 1, \qquad \omega_1 = -1.$$

Par suite

$$a = \alpha(x, y)\,e^{z}, \qquad b = \beta(x, y)\,e^{-z},$$

et la relation (10) s'écrit

$$\frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial \alpha}{\partial x}e^{z} + \frac{\partial \beta}{\partial y}e^{-z},$$

d'où, en intégrant,

$$c = \frac{\partial \alpha}{\partial x} e^{z} - \frac{\partial \beta}{\partial y} e^{-z} + \mathrm{K}(x, y).$$

L'équation proposée peut donc s'écrire

$$s = \alpha e^{z} p + \beta e^{-z} q + \frac{\partial \alpha}{\partial x} e^{z} - \frac{\partial \beta}{\partial y} e^{-z} + \mathrm{K}(x, y)$$

ou encore

$$s = \frac{\partial}{\partial x}(\alpha e^{z}) - \frac{\partial}{\partial y}(\beta e^{-z}) + \mathrm{K}(x, y).$$

Une transformation de la forme $z' = z + \theta(x, y)$ permet de faire disparaître le terme K en posant $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} = -\mathrm{K}$. On aura ainsi, en changeant la signification de α et β,

$$s = \frac{\partial}{\partial x}(\alpha e^{z}) - \frac{\partial}{\partial y}(\beta e^{-z}).$$

C'est là précisément le type des équations trouvées par M. Moutard. On sait que ces équations se ramènent à une équation linéaire par une transformation simple. Nous reviendrons d'ailleurs sur ce résultat.

4. Nous avons raisonné au sujet de l'équation (10) dans l'hypothèse où $m\omega - m_1\omega_1 \neq 0$; supposons maintenant qu'il n'en soit plus ainsi et qu'on ait

$$\frac{\omega}{m_1} = \frac{\omega_1}{m} = \theta(x, y).$$

Nous pouvons poser, sans changer la forme de l'équation proposée : $z' = z\theta$, ce qui revient à prendre

$$\omega = m_1, \qquad \omega_1 = m$$

et par suite

$$a = \alpha(x, y) e^{m_1 z}, \qquad b = \beta(x, y) e^{m z}.$$

Dans ce cas, les conditions (8) et (9) sont identiques et se ramènent à la suivante :

$$\frac{\partial^2 c}{\partial z^2} - m m_1 \frac{\partial c}{\partial z} + (m + m_1) ab + m_1(m - 1)\frac{\partial a}{\partial x} + m(m_1 - 1)\frac{\partial b}{\partial y} = 0;$$

en remplaçant a et b par leurs valeurs, on intègre facilement cette équation différentielle, c étant la fonction inconnue; et l'on obtient

$$(12)\qquad \begin{aligned} c = {} & \frac{1}{m_1}\frac{\partial\alpha}{\partial x}e^{m_1 z} + \frac{1}{m}\frac{\partial\beta}{\partial y}e^{mz} + \frac{\alpha\beta}{mm_1-(m+m_1)}e^{(m+m_1)z} \\ & + \mathrm{H}(x,y)\,e^{mm_1 z} + \mathrm{K}(x,y), \end{aligned}$$

K et H étant deux fonctions arbitraires de x et y.

On a dû supposer, il est vrai, $mm_1-(m+m_1)\neq 0$; on voit sans peine que l'égalité

$$m+m_1 = mm_1$$

n'est possible en nombres entiers différents de zéro que pour

$$m = m_1 = 2.$$

Nous étudierons à part ce cas en dernier lieu et nous supposerons pour l'instant

$$m > 2, \qquad m_1 > 2.$$

Cela étant, les équations (5), (6), (7) sont compatibles et la condition nécessaire (4) est insuffisante pour résoudre complètement le problème. On en tire simplement

$$\lambda = -mm_1, \qquad \mu = b(m_1-1) + \nu(x,y),$$

ν étant une fonction qui doit vérifier l'équation (7).

Nous obtiendrons des conditions nouvelles en repartant de l'équation (2), sachant qu'on a

$$(13)\qquad \psi' = \frac{\partial\psi}{\partial p_{m-1}} = -mm_1 p_1 + b(m_1-1) + \nu(x,y).$$

Dans cette équation (2) les termes en p_m et p_{m-1} disparaissent; nous allons considérer les termes en p_{m-2}; mais comme la manière dont p_{m-2} entre dans l'expression $\left(\frac{d^{m-1}f}{dx^{m-1}}\right)$ dépend essentiellement de la valeur de m, il faudra faire des hypothèses sur cette valeur.

5. Supposons d'abord $m>4$, c'est-à-dire $m-1>3$. Dans ces conditions, nous savons que $\left(\frac{d^{m-1}f}{dx^{m-1}}\right)$ est une expression linéaire par rapport à p_m, p_{m-1}, p_{m-2}. On aura en outre

$$\psi = \psi' p_{m-1} + \psi_1(x, y, z, p_1, \ldots, p_{m-2})$$

et l'équation (2) peut s'écrire, en supprimant les termes en p_m et p_{m-1},

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial y} + q_1 \frac{\partial\psi_1}{\partial z} + f\frac{\partial\psi_1}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial\psi_1}{\partial p_2} + \ldots$$
$$+ \left(\frac{d^{m-3}f}{dx^{m-3}}\right)\frac{\partial\psi_1}{\partial p_{m-2}} + \psi'[\mathrm{M}_{m-2}^{m-2} p_{m-2} + \ldots] + \mathrm{M}_{m-1}^{m-2} p_{m-2} + \ldots = \frac{\partial f}{\partial p_1}\psi_1,$$

les termes non écrits ne renfermant que des dérivées d'ordre inférieur à $m-2$.

Posons $\psi'_1 = \dfrac{\partial\psi_1}{\partial p_{m-2}}$ et dérivons par rapport à p_{m-2} la relation précédente : il vient

$$(14) \qquad \frac{\partial\psi'_1}{\partial y} + q_1 \frac{\partial\psi'_1}{\partial z} + f\frac{\partial\psi'_1}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial\psi'_1}{\partial p_2} + \ldots$$
$$+ \left(\frac{d^{m-3}f}{dx^{m-3}}\right)\frac{\partial\psi'_1}{\partial p_{m-2}} + (\psi'\mathrm{M}_{m-2}^{m-2} + \mathrm{M}_{m-1}^{m-2}) = 0.$$

Le terme $\psi'\mathrm{M}_{m-2}^{m-2} + \mathrm{M}_{m-1}^{m-2}$ ne dépend pas des dérivées d'ordre supérieur à deux; la remarque (I) nous permet d'en conclure que ψ'_1 ne dépend pas non plus de ces dérivées; en outre, le dernier terme étant un polynome du premier degré en p_2, il en sera de même de ψ'_1, d'après la remarque en question. On peut donc écrire

$$\psi'_1 = \psi_2(x, y, z, p_1)p_2 + \psi_3(x, y, z, p_1).$$

Nous avons vu d'autre part qu'on a

$$\mathrm{M}_{m-2}^{m-2} = (m-2)\left(\frac{\partial a}{\partial x} + p_1\frac{\partial a}{\partial z}\right) + p_1\frac{\partial a}{\partial z} + q_1\frac{\partial b}{\partial z} + \frac{\partial c}{\partial z} + ab,$$

$$\mathrm{M}_{m-1}^{m-2} = p_2\frac{m(m-1)}{2}\frac{\partial a}{\partial z} + \mathrm{N}_{m-1}^{m-2},$$

avec

$$(15) \quad \mathrm{N}_{m-1}^{m-2} = \frac{\partial^2 a}{\partial z^2}\frac{m(m-1)}{2}p_1^2$$
$$+ p_1\left[(m-1)^2\frac{\partial^2 a}{\partial z\, \partial x} + (m-1)\frac{\partial(ab)}{\partial z}\right.$$
$$\left. + (m-1)\left(\frac{\partial^2 b}{\partial z^2}q_1 + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + a\frac{\partial b}{\partial z}\right)\right] + \mathrm{L}(x, y, z, q_1).$$

Portons ces expressions dans la relation (14) : nous devons obtenir une identité; en particulier le coefficient de p_2 doit être nul, ce qui donne

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial y}+q_1\frac{\partial\psi_2}{\partial z}+f\frac{\partial\psi_2}{\partial p_1}+\psi_2\frac{\partial f}{\partial p_1}+\frac{m(m-1)}{2}\frac{\partial a}{\partial z}=0;$$

la remarque (I) montre encore que $\frac{\partial\psi_2}{\partial p_1}=0$, et par suite le seul terme en q_1 dans l'équation précédente doit disparaître; on a donc

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial\psi_2}{\partial y}+\psi_2 a+\frac{m(m-1)}{2}\frac{\partial a}{\partial z}=0$$

ou encore

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial y}+\alpha\psi_2 e^{m_1 z}+\frac{m(m-1)}{2}m_1\alpha e^{m_1 z}=0.$$

Comme α n'est pas nul, il est nécessaire et suffisant, pour que ces relations soient vérifiées, qu'on ait

$$\psi_2=-\frac{mm_1(m-1)}{2}.$$

Écrivons maintenant que le terme indépendant de p_2, dans l'équation (14), est nul; en tenant compte de la valeur trouvée pour ψ_2, il vient

$$(16)\qquad \frac{\partial\psi_3}{\partial y}+q_1\frac{\partial\psi_3}{\partial z}+f\frac{\partial\psi_3}{\partial p_1}$$
$$=\frac{mm_1(m-1)}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+p_1\frac{\partial f}{\partial z}+f\frac{\partial f}{\partial q_1}\right)-\psi' \mathrm{M}_{m-2}^{m-2}-\mathrm{N}_{m-1}^{m-2}.$$

Le second membre est un polynome du second degré en p_1; d'après la remarque (I) on doit avoir

$$\psi_3=u(x,y,z)p_1^2+v(x,y,z)p_1+w(x,y,z)$$

et, en transportant cette expression dans la relation (16), on aura dans les deux membres des polynomes du second degré en p_1 qui doivent être identiques.

On en tire d'abord

$$\frac{\partial u}{\partial y}+q_1\frac{\partial u}{\partial z}+2au=\frac{mm_1(m-1)}{2}\frac{\partial a}{\partial z}+mm_1(m-1)\frac{\partial a}{\partial z}-\frac{m(m-1)}{2}\frac{\partial^2 a}{\partial z^2}.$$

Si l'on remplace a par sa valeur, on constate facilement que cette égalité revient à

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \qquad u = \frac{mm_1^2(m-1)}{2}.$$

Écrivons maintenant l'identité des termes en p_1 dans l'équation (16) :

$$(17) \quad \begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial y} + q_1 \frac{\partial v}{\partial z} + 2u(bq_1 + c) + av \\ &= \frac{mm_1(m-1)}{2}\left[\frac{\partial a}{\partial x} + q_1\frac{\partial b}{\partial z} + \frac{\partial c}{\partial z} + ab\right] \\ &- (m-1)\frac{\partial a}{\partial z}[b(m_1 - 1) + \nu] \\ &+ mm_1\left[(m-2)\frac{\partial a}{\partial x} + q_1\frac{\partial b}{\partial z} + \frac{\partial c}{\partial z} + ab\right] \\ &- (m-1)^2\frac{\partial^2 a}{\partial x\,\partial z} - (m-1)\left[\frac{\partial^2 b}{\partial z^2}q_1 + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + \frac{\partial(ab)}{\partial z} + a\frac{\partial b}{\partial z}\right]. \end{aligned}$$

Cette relation contenant q_1 se décompose en deux. On a d'abord

$$\frac{\partial v}{\partial z} + 2ub = \frac{mm_1(m-1)}{2}\frac{\partial b}{\partial z} + mm_1\frac{\partial b}{\partial z} - (m-1)\frac{\partial^2 b}{\partial z^2}.$$

On peut intégrer facilement cette équation, en tenant compte de la valeur de b; on trouve ainsi

$$v = kb + v_1(x, y),$$

en posant

$$k = \frac{mm_1(m+1)}{2} - m(m-1) - m_1^2(m-1).$$

Écrivons maintenant les termes indépendants de q_1 dans l'équation (17), en tenant compte de la valeur trouvée pour v; il vient

$$\begin{aligned} &k\frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + 2uc + a(kb + v_1) \\ &= \frac{mm_1(m-1)}{2}\left[\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial z} + ab\right] - (m-1)\frac{\partial a}{\partial z}[b(m_1 - 1) + \nu] \\ &+ mm_1\left[(m-2)\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial z} + ab\right] \\ &- (m-1)^2\frac{\partial^2 a}{\partial x\,\partial z} - (m-1)\left[\frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + \frac{\partial(ab)}{\partial z} + a\frac{\partial b}{\partial z}\right]. \end{aligned}$$

C'est là une égalité de la forme

$$A(x,y)\,e^{mz} + B(x,y)\,e^{m_1 z} + C(x,y)\,e^{(m+m_1)z} + D(x,y)\,e^{mm_1 z} + E(x,y) = 0,$$

d'après les valeurs trouvées pour a, b, c. Comme m et m_1 sont différents de zéro et qu'on a supposé

$$m + m' - mm' \neq 0,$$

cette égalité ne peut avoir lieu identiquement que si l'on a

$$C = D = E = 0.$$

Écrivons en particulier que le coefficient C est nul; il vient

$$\begin{aligned}\alpha\beta\left[k + \frac{2u}{mm_1 - (m+m_1)}\right] &= \alpha\beta\frac{mm_1(m+1)}{2}\left[1 + \frac{m+m_1}{mm_1-(m+m_1)}\right] - m_1(m-1)(m_1-1)\alpha\beta \\ &\quad - (m-1)\left[\frac{(m+m_1)^2}{mm_1-(m+m_1)} + (m+m_1) + m\right]\alpha\beta.\end{aligned}$$

Comme $\alpha\beta \neq 0$, on doit donc avoir l'égalité

$$\begin{aligned}k[mm_1 - (m+m_1)] + 2u &= \frac{mm_1(m+1)}{2}mm_1 - m_1(m-1)(m_1-1)[mm_1-(m+m_1)] \\ &\quad - (m-1)[mm_1(m+m_1) + m^2m_1 - m(m+m_1)].\end{aligned}$$

En remplaçant k et u par leur valeur, cette expression se simplifie considérablement : on constate sans peine qu'elle se met sous la forme

$$(18)\qquad m_1(m+m_1)(m+1)(m-2) = 0.$$

Comme nous avons supposé m et m_1 supérieurs à deux, cette égalité est impossible.

Donc il n'existe pas dans ce cas d'équation irréductible d'ordre supérieur à 4, en involution avec la proposée.

6. Supposons maintenant $m = 4$. Dans ce cas l'équation (2) s'écrit

$$(19)\qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} + q_1\frac{\partial\psi}{\partial z} + f\frac{\partial\psi}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial\psi}{\partial p_2} + \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)\frac{\partial\psi}{\partial p_3} + \left(\frac{d^3f}{dx^3}\right) = \frac{\partial f}{\partial p_1}(p_4 + \psi)$$

et l'on a encore

$$\psi' = \frac{\partial\psi}{\partial p_3} = -mm_1 p_1 + b(m_1 - 1) + \nu(x, y).$$

d'où

$$\psi = \psi' p_3 + \psi_1(x, y, z, p_1, p_2).$$

Nous avons vu, en outre, qu'on a

$$\left(\frac{d^3 f}{dx^3}\right) = ap_4 + \mathrm{M}_3^3 p_3 + 3p_2^2 \frac{\partial a}{\partial z} + np_2 + l.$$

L'équation (19) peut donc s'écrire

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial y} + q_1 \frac{\partial\psi_1}{\partial z} + f\frac{\partial\psi_1}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial\psi_1}{\partial p_2} + \psi'[\mathrm{M}_2^2 p_2 + \ldots] + 3p_2^2\frac{\partial a}{\partial z} + np_2 + l = \frac{\partial f}{\partial p_1}\psi_1,$$

les termes non écrits étant indépendants de p_2.

Posons $\dfrac{\partial\psi_1}{\partial p_2} = \psi'_1$ et dérivons la relation précédente par rapport à p_2; il vient

$$(20)\quad \frac{\partial\psi'_1}{\partial y} + q_1\frac{\partial\psi'_1}{\partial z} + f\frac{\partial\psi'_1}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial\psi'_1}{\partial p_2} + \psi'\mathrm{M}_2^2 + 6p_2\frac{\partial a}{\partial z} + n(x, y, z, p_1, q_1) = 0.$$

Or nous pouvons remarquer que, si, dans l'expression de M_n^{n-1}, on fait $n = 3$, on obtient précisément la quantité

$$6p_2\frac{\partial a}{\partial z} + n(x, y, z, p_1, q_1);$$

cela se voit immédiatement en considérant dans le Chapitre précédent l'expression (29) qui est équivalente à (32) et en remarquant que si l'on fait $n = 3$ dans l'expression de $(\mathrm{M}_{n-1}^{n-1} + \mathrm{M}_{n-2}^{n-2} + \ldots + \mathrm{M}_3^3)$ donnée par la formule (30), on obtient zéro. Donc dans la formule (29), le second membre se réduit bien à $6p_2\dfrac{\partial a}{\partial z} + n$.

La relation (20) a donc la même forme que celle dont nous sommes partis dans le cas précédent (14); si dans cette équation (14) on remplace M_{m-2}^{m-2} et M_{m-1}^{m-2} par leurs valeurs et qu'on fasse ensuite $m - 1 = 3$, c'est-à-dire $m = 4$, on obtient l'équation (20). Comme nous avons constaté que la condition (14) ne pouvait être vérifiée que si l'on a

$$m_1(m_1+m)(m+1)(m-2)=0$$

dans le cas actuel où $m=4$, nous trouverons encore une impossibilité.

7. Supposons $m=3$. L'équation (2) s'écrit

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}+q_1\frac{\partial\psi}{\partial z}+f\frac{\partial\psi}{\partial p_1}+\left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial\psi}{\partial p_2}+\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)=\frac{\partial f}{\partial p_1}(p_3+\psi), \tag{21}$$

on a encore

$$\psi'=\frac{\partial\psi}{\partial p_2}=-mm_1p_1+b(m_1-1)+\nu(x,y);$$

d'où

$$\psi=\psi'p_2+\psi_1(x,y,z,p_1)$$

et l'équation (21) se réduit à la suivante, en tenant compte des valeurs trouvées pour $\left(\frac{df}{dx}\right)$ et $\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)$:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\psi_1}{\partial y}+q_1\frac{\partial\psi_1}{\partial z}+f\frac{\partial\psi_1}{\partial p_1}\\&\quad+\psi'\left[\frac{\partial f}{\partial x}+p_1\frac{\partial f}{\partial z}+f\frac{\partial f}{\partial q_1}\right]+\frac{\partial^2 a}{\partial z^2}p_1^3+gp_1^2+hp_1+k=\frac{\partial f_1}{\partial p_1}\psi_1.\end{aligned}$$

Posons $\frac{\partial\psi_1}{\partial p_1}=\psi_2$ et dérivons l'identité précédente par rapport à p_1 en tenant compte de la valeur de ψ'; il vient

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\psi_2}{\partial y}+q_1\frac{\partial\psi_2}{\partial z}+f\frac{\partial\psi_2}{\partial p_1}+\psi'\left[\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}+p_1\frac{\partial a}{\partial z}+ab\right]\\&\quad-mm_1\left[\frac{\partial f}{\partial x}+p_1\frac{\partial f}{\partial z}+bf\right]+3\frac{\partial^2 a}{\partial z^2}p_1^2+2gp_1+h=0.\end{aligned}$$

qui peut s'écrire

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\psi_2}{\partial y}+q_1\frac{\partial\psi_2}{\partial z}+f\frac{\partial\psi_2}{\partial p_1}\\&\quad=mm_1\left[\frac{\partial f}{\partial x}+p_1\frac{\partial f}{\partial z}+f\frac{\partial f}{\partial q_1}\right]\\&\qquad-\psi'\left[\frac{\partial a}{\partial x}+2p\frac{\partial a}{\partial z}+\frac{\partial b}{\partial z}q+\frac{\partial c}{\partial z}+ab\right]-\left(3\frac{\partial^2 a}{\partial z^2}p_1^2+2gp_1+h\right).\end{aligned}\tag{22}$$

On peut voir encore que cette équation a la forme (16) du cas $m > 4$: on la déduit de celle-ci en y remplaçant les quantités M_{m-2}^{m-2} et M_{m-1}^{m-2} par leur expression et en faisant ensuite $m = 3$. En effet si, dans l'expression M_n^n donnée par la formule

$$M_n^n = n\left(\frac{da}{dx}\right) + \frac{\partial a}{\partial z_1} p_1 - \frac{\partial b}{\partial z} q_1 + \frac{\partial c}{\partial z} + ab,$$

on fait $n = 1$, on a précisément le coefficient de ψ' dans l'équation (22).

Considérons maintenant la formule (32) du Chapitre précédent qui donne N_n^{n-1} : si l'on fait $n = 2$, on trouve

$$(23)\quad 3\frac{\partial^2 a}{\partial z^2} p_1^2 + p_1 \left\{ 4\frac{\partial^2 a}{\partial z\, \partial x} + 2\left[\frac{\partial^2 b}{\partial z^2} q_1 + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + \frac{\partial (ab)}{\partial z} + a\frac{\partial b}{\partial z}\right]\right\} + L(x, y, z, q_1).$$

Or on a vu que

$$g = 2\frac{\partial^2 a}{\partial z\, \partial x} + \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} q_1 + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + \frac{\partial (ab)}{\partial z} + a\frac{\partial b}{\partial z};$$

le coefficient de p_1 dans l'expression (23) est donc égal à $2g$ et par suite la relation (22) ne peut différer de la relation (16) où l'on aurait fait $m = 3$ que par les termes h et L; comme nous n'avons pas fait usage de ce terme L dans les raisonnements, il est clair que l'équation (22) nous conduira aux mêmes conclusions que l'équation (16), c'est-à-dire encore à la condition

$$m_1(m_1 + m)(m + 1)(m - 2) = 0$$

qui n'est pas vérifiée quand $m = 3$. Donc nous trouvons encore une impossibilité.

8. Supposons $m = 2$; en restant toujours dans l'hypothèse

$$m + m_1 \neq m m_1,$$

il est nécessaire qu'on ait $m_1 > 2$. Mais nous venons de voir que, dans le cas que nous étudions, c'est-à-dire dans le cas où

$$a = \alpha(x, y)\, e^{m_1 z}, \qquad b = \beta(x, y)\, e^{m z},$$

il ne peut exister aucune équation irréductible du système (I) d'ordre supérieur à 2, formant avec la proposée un système en involution. Des raisonnements analogues prouveraient évidemment qu'il ne peut exister aucune équation en involution du système (II), d'ordre supérieur à deux. Donc si $m = 2$ il faut $m_1 = 2$.

9. Étudions enfin le cas écarté au début

$$m = m_1 = 2.$$

La relation $m\omega - m_1\omega_1 = 0$ montre dans ce cas que $\omega = \omega_1$; en posant $z' = \omega z$, on aura une équation de même forme; cela revient à prendre

$$\omega = \omega_1 = 1,$$

d'où

$$a = \alpha(x, y)\, e^z, \qquad b = \beta(x, y)\, e^z.$$

Dans ce cas les conditions (8) et (9) sont identiques et se ramènent à

$$\frac{\partial^2 c}{\partial z^2} - 2\frac{\partial c}{\partial z} + 2ab + \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} = 0;$$

en remplaçant a et b par leurs valeurs, on peut intégrer cette équation, c étant la fonction inconnue; on obtient ainsi

$$c = e^{2z}[\mathrm{K}(x, y) - \alpha\beta z] + e^z\left[\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\right] + \mathrm{H}(x, y),$$

K et H étant deux fonctions arbitraires introduites par l'intégration.

L'équation (2) peut s'écrire, dans ce cas,

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} + q_1\frac{\partial\psi}{\partial z} + f\frac{\partial\psi}{\partial p_1} + \frac{\partial f}{\partial x} + p_1\frac{\partial f}{\partial z} + f\frac{\partial f}{\partial q_1} = \psi\frac{\partial f}{\partial p_1}.$$

Nous pouvons encore appliquer la remarque (I); ici $i = -1$ et $h = 2$; donc ψ doit être un polynome du second degré par rapport à p_1

$$\psi = u(x, y, z)p_1^2 + v(x, y, z)p_1 + w(x, y, z);$$

en portant cette expression dans l'équation précédente et en écrivant qu'on a une identité en p_1, on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial y}+q_1\frac{\partial u}{\partial z}+2au+\frac{\partial a}{\partial z}=au,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}+q_1\frac{\partial v}{\partial z}+av+2u(bq_1+c)+\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial z}q_1+\frac{\partial c}{\partial z}+ab=av,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}+q_1\frac{\partial w}{\partial z}+v(bq_1+c)+\frac{\partial b}{\partial x}q+\frac{\partial c}{\partial x}+b(bq_1+c)=aw.$$

Chacune de ces équations se décompose en deux à cause de la présence de q_1. De la première on tire immédiatement

$$\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

et par suite

$$\frac{\partial u}{\partial y}=0,\qquad u=-1.$$

De la deuxième on tire

$$\frac{\partial v}{\partial z}-2b+\frac{\partial b}{\partial z}=0,$$

d'où, en intégrant,

$$v=b+v_1(x,y)$$

avec

$$\frac{\partial b}{\partial y}+\frac{\partial v_1}{\partial y}-2c+\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial c}{\partial z}+ab=0;$$

en remplaçant a, b, c par leur valeur, cette relation se réduit à

$$\frac{\partial v_1}{\partial y}=2\mathrm{H}.$$

Enfin la troisième se décompose en

$$\frac{\partial w}{\partial z}+vb+\frac{\partial b}{\partial x}+b^2=0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}+vc+\frac{\partial c}{\partial x}+bc=aw.$$

En remplaçant v et b par leurs valeurs, on peut facilement intégrer la première

$$w+b^2+bv_1+\frac{\partial b}{\partial x}=w_1(x,y),$$

et en portant cette expression dans la deuxième équation, il vient

$$
\begin{aligned}
&-2b\frac{\partial b}{\partial y} - b\frac{\partial v_1}{\partial y} - v_1\frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial^2 b}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial y} \\
&\quad + c(b+v_1) + \frac{\partial c}{\partial x} + bc + a\left(b^2 + bv_1 + \frac{\partial b}{\partial x} - w_1\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Si l'on remplace a, b, c par leurs valeurs, cette relation est de la forme

$$e^{3z}[\mathrm{A}z + \mathrm{B}] + e^{2z}[\mathrm{A}'z + \mathrm{B}'] + \mathrm{C}e^z + \mathrm{D}z + \mathrm{E} = 0.$$

A, B, A′, B′, C, D, E étant des fonctions de x et y seulement. Cette relation devant être vérifiée identiquement, on doit avoir

$$\mathrm{A} = \mathrm{B} = \mathrm{A}' = \mathrm{B}' = \mathrm{C} = \mathrm{D} = \mathrm{E} = 0.$$

Or, on a

$$\mathrm{A} = -2\alpha\beta^2;$$

il ne peut être nul que si α ou β est nul, ce qui est contraire aux hypothèses.

Dans ce cas encore il y a impossibilité.

10. En résumé, nous avons démontré le résultat suivant :

Si une équation de la forme

$$s = a(x, y, z)p_1 + b(x, y, z)q_1 + c(x, y, z),$$

où l'on a $\frac{\partial a}{\partial z} \neq 0$, $\frac{\partial b}{\partial z} \neq 0$, *forme séparément un système en involution avec deux équations irréductibles de système différent et d'ordre supérieur à* 1, *sans être en involution avec une équation d'ordre* 1, *elle est nécessairement de la forme trouvée par M. Moutard, et se ramène par conséquent, par une transformation simple, à une équation linéaire.*

En particulier, pour répondre à la question posée au début de ce Chapitre, si une équation $s = ap + bq + c$ admet une intégrale générale de la première classe, les dénominateurs des deux invariants étant d'ordre supérieur à l'unité, c'est une équation de Moutard.

11. *Deuxième cas.* — Nous supposerons maintenant que le dénominateur du premier invariant est d'ordre égal à 1, tandis que celui de l'autre invariant est d'ordre supérieur à l'unité; on aura donc à la fois les équations (I) et (II)'.

Puisque $\frac{\partial b}{\partial z} \neq 0$, l'étude que nous avons faite au début du cas précédent (n° 2) s'applique ici, sans y rien changer, au dénominateur du deuxième invariant. Par suite, on doit avoir

$$b = \beta(x, y)\, e^{\omega_1(x,y)z} - \frac{\partial \log \omega_1}{\partial x};$$

en posant $z' = \omega_1(x, y) z$ l'équation ne change pas de forme, mais le terme $\omega_1(x, y)$ devient identique à l'unité; on peut donc prendre

$$b = \beta(x, y)\, e^z.$$

En outre, on aura encore la relation (9), en y faisant $\omega_1 = 1$.

$$(24)\quad \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + (m_1 - 1)\frac{\partial^2 b}{\partial y\, \partial z} + a\frac{\partial b}{\partial z} + b\frac{\partial a}{\partial z} + m_1\frac{\partial a}{\partial x} - m_1\frac{\partial c}{\partial z} + \frac{\partial^2 a}{\partial z\, \partial x};$$

m_1 est l'ordre du dénominateur de l'invariant : on a donc par hypothèse $m_1 > 1$.

L'équation (I) s'écrit

$$\frac{\partial A_1}{\partial y} + q_1\frac{\partial A_1}{\partial z} + (ap_1 + bq_1 + c)\frac{\partial A_1}{\partial p_1} = a A_1.$$

Posons $\frac{\partial A_1}{\partial p_1} = A'_1$ et dérivons par rapport à p_1 l'identité précédente; il vient

$$\frac{\partial A'_1}{\partial y} + q_1\frac{\partial A'_1}{\partial z} + (ap_1 + bq_1 + c)\frac{\partial A'_1}{\partial p_1} = 0,$$

ce qui montre que A'_1 est un invariant du premier ordre de l'équation proposée; l'équation précédente se décompose en deux :

$$\frac{\partial A'_1}{\partial y} + (ap_1 + c)\frac{\partial A'_1}{\partial p_1} = 0, \qquad \frac{\partial A'_1}{\partial z} + b\frac{\partial A'_1}{\partial p_1} = 0.$$

Ces équations sont incompatibles lorsque $\frac{\partial a}{\partial z} \neq 0$, à moins qu'on n'ait

$$\frac{\partial A'_1}{\partial y} = \frac{\partial A'_1}{\partial z} = \frac{\partial A'_1}{\partial p_1} = 0, \qquad A'_1 = X(x).$$

On aura donc

$$A_1 = X[p_1 + \mu(x, y, z)], \qquad X \neq 0,$$

avec

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \mu}{\partial z} + b q_1 + c = a\mu.$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\partial \mu}{\partial z} + b = 0,$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} + c = a\mu;$$

en tenant compte de la valeur de b, la première s'intègre facilement et donne $\mu + b = \mu_1(x, y)$; la deuxième permet alors d'écrire

$$c = a(\mu_1 - b) + \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial \mu_1}{\partial y}.$$

Faisons le changement de variable défini par l'équation $z' = z + \lambda(x, y)$ avec la condition $\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \mu_1(x, y)$. On constate facilement que l'équation proposée garde la même forme

$$s = ap_1 + bq_1 + c$$

et l'on a

$$(25) \qquad b = \beta(x, y)\,e^z, \qquad c = \frac{\partial b}{\partial y} - ab;$$

cela revient à faire $\mu_1 = 0$. On prendra donc comme dénominateur du premier invariant

$$A_1 = p - b.$$

Si l'on remarque que dans ce cas $\frac{\partial b}{\partial z} = b$, la relation (24) se met facilement sous la forme

$$(26) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(m_1 a - \frac{\partial a}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left[b\left(m_1 a - \frac{\partial a}{\partial z}\right)\right] = 0.$$

12. Soit $p_n + \varphi(x, y, z, p_1, \ldots, p_{n-1})$ le numérateur de l'invariant du système (I); on a identiquement

$$(27) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z} + f \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + \ldots$$
$$+ \left(\frac{d^{n-2} f}{dx^{n-2}}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial p_{n-1}} + \left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right) = (p_n + \varphi) \frac{\partial f}{\partial p_1}.$$

Posons $\frac{\partial\varphi}{\partial p_{n-1}} = \varphi'$ et dérivons, par rapport à p_{n-1}, l'égalité précédente; en supposant $n-1>1$, il vient

$$(28)\qquad \frac{\partial\varphi'}{\partial y} + q_1\frac{\partial\varphi'}{\partial z} + f\frac{\partial\varphi'}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial\varphi'}{\partial p_2} + \ldots + \left(\frac{d^{k-1}f}{dx^{k-1}}\right)\frac{\partial\varphi'}{\partial p_k} + \mathrm{M}_{n-1}^{n-1} = 0,$$

en appelant k l'ordre des dérivées d'ordre le plus grand dont dépend effectivement φ'. Si $k>2$, en appliquant la remarque (II), on voit qu'on a

$$\varphi' = \frac{\mathrm{X}(x)}{p_1-b}p_k + \varphi_1(x, y, z, p_1, \ldots, p_{k-1}), \qquad \mathrm{X}\neq 0,$$

et

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + q_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + f\frac{\partial\varphi_1}{\partial p_1} + \ldots\\ &\quad + \left(\frac{d^{k-2}f}{dx^{k-2}}\right)\frac{\partial\varphi_1}{\partial p_{k-1}} + \frac{\mathrm{X}}{p_1-b}(\mathrm{M}_{k-1}^{k-1}p_{k-1}+\ldots) + \mathrm{M}_{n-1}^{n-1} = 0.\end{aligned}$$

Posons encore $\frac{\partial\varphi_1}{\partial p_{k-1}} = \varphi'_1$ et dérivons l'identité précédente par rapport à p_{k-1} :

$$\frac{\partial\varphi'_1}{\partial y} + q_1\frac{\partial\varphi'_1}{\partial z} + f\frac{\partial\varphi'_1}{\partial p_1} + \ldots + \left(\frac{d^{k-2}f}{dx^{k-2}}\right)\frac{\partial\varphi'_1}{\partial p_{k-1}} + \frac{\partial f}{\partial p}\varphi'_1 + \frac{\mathrm{X}}{p_1-b}\mathrm{M}_{k-1}^{k-1} = 0;$$

en posant $\varphi_1 = \psi\frac{\mathrm{X}}{p_1-b}$, l'équation précédente prend la forme

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} + q_1\frac{\partial\psi}{\partial z} + f\frac{\partial\psi}{\partial p_1} + \ldots + \left(\frac{d^{k-2}f}{dx^{k-2}}\right)\frac{\partial\psi}{\partial p_{k-1}} + \mathrm{M}_{k-1}^{k-1} = 0;$$

elle a une forme analogue à (28), mais l'ordre maximum des dérivées contenues dans la fonction φ' a diminué d'une unité au moins. En répétant l'opération, on arrivera donc certainement à une équation (28) où l'on aura $k\leq 2$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y} + q_1\frac{\partial\lambda}{\partial z} + f\frac{\partial\lambda}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial p_2} + \mathrm{M}_h^h = 0, \qquad h\geqq 2,$$

ou

$$\begin{aligned}(29)\qquad &\frac{\partial\lambda}{\partial y} + q_1\frac{\partial\lambda}{\partial z} + f\frac{\partial\lambda}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial p_2}\\ &\quad + h\frac{\partial a}{\partial x} + (h+1)\frac{\partial a}{\partial z}p_1 + \frac{\partial b}{\partial z}q_1 + \frac{\partial c}{\partial z} + ab = 0.\end{aligned}$$

Si dans l'équation (27) on avait $n - 1 = 1$, elle s'écrirait

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z} + f \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + p_1 \frac{\partial f}{\partial z} + bf \right) = \varphi a;$$

en posant $\dfrac{\partial \varphi}{\partial p_1} = \varphi'$,

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \varphi'}{\partial z} + f \frac{\partial \varphi'}{\partial p_1} + \frac{\partial a}{\partial x} + 2 p_1 \frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial b}{\partial z} q_1 + \frac{\partial c}{\partial z} + ab = 0.$$

Cette équation a la forme (29); il suffit de faire $h = 1$ et $\dfrac{\partial \lambda}{\partial p_2} = 0$. Donc, dans tous les cas, on aura l'équation (29) avec la condition $h \geqq 1$.

La remarque (II) montre alors qu'on a

$$\lambda = \frac{X(x)}{p_1 - b} p_2 + \lambda_1(x, y, z, p_1),$$

X pouvant d'ailleurs être nul. L'équation (29) se ramène donc à

$$(30) \qquad \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \lambda_1}{\partial z} + f \frac{\partial \lambda_1}{\partial p} + \frac{X}{p_1 - b} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + p_1 \frac{\partial f}{\partial z} + bf \right) + h \frac{\partial a}{\partial x} + (h+1) p_1 \frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial b}{\partial z} q_1 + \frac{\partial c}{\partial z} + ab = 0.$$

15. Si $X = 0$, en posant $\dfrac{\partial \lambda_1}{\partial p} = \lambda'_1$ et en dérivant l'équation précédente par rapport à p_1, il vient

$$(31) \qquad \frac{\partial \lambda'_1}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \lambda'_1}{\partial z} + f \frac{\partial \lambda'_1}{\partial p_1} + a\lambda'_1 + (h+1) \frac{\partial a}{\partial z} = 0,$$

la remarque (II) montre alors qu'on a

$$\lambda'_1 = \frac{X_1(x)}{p_1 - b} + u(x, y, z),$$

d'où

$$\frac{\partial u}{\partial y} + q_1 \frac{\partial u}{\partial z} + au + (h+1) \frac{\partial a}{\partial z} = 0$$

qui se décompose en

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

$$(h+1) \frac{\partial a}{\partial z} + au + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Comme nous avons supposé $\frac{\partial a}{\partial z} \neq 0$, u ne peut pas être nul. On tire donc de cette équation

$$a = \alpha(x, y)\, e^{\omega(x,y)z} - \frac{\partial \operatorname{Log} \omega}{\partial y} \tag{32}$$

en posant

$$u + (h+1)\omega = 0.$$

14. Si dans l'équation (30) X n'est pas nul, on peut poser

$$\lambda_1 = \frac{X}{p_1 - b}\mu(x, y, z, p_1);$$

il vient alors

$$\begin{aligned}(33)\quad & \frac{\partial \mu}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \mu}{\partial z} + f\frac{\partial \mu}{\partial p_1} - a\mu + \frac{\partial f}{\partial x} \\ & \quad + p_1 \frac{\partial f}{\partial z} + bf + \frac{p_1 - b}{X}\left[h\frac{\partial a}{\partial x} + (h+1)\frac{\partial a}{\partial z}p_1 + \frac{\partial b}{\partial z}q_1 + \frac{\partial c}{\partial z} + ab\right] = 0.\end{aligned}$$

Posons $\frac{\partial^2 \mu}{\partial p_1^2} = \mu''$ et dérivons deux fois successivement cette équation par rapport à p_1; il vient

$$\frac{\partial \mu''}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \mu''}{\partial z} + f\frac{\partial \mu''}{\partial p_1} + a\mu'' + 2\left(1 + \frac{h+1}{X}\right)\frac{\partial a}{\partial z} = 0;$$

cette relation a absolument la forme (31); si $1 + \frac{h+1}{X} \neq 0$, on en déduira donc encore nécessairement la formule (32).

Enfin si $1 + \frac{h+1}{X} = 0$, l'équation précédente montre, d'après la remarque (II), qu'on a

$$\mu'' = \frac{X_1(x)}{p_1 - b},$$

d'où

$$\mu' = \frac{\partial \mu}{\partial p} = X_1 \operatorname{Log}(p_1 - b) + u(x, y, z).$$

D'autre part, de l'équation (33) on déduit, en dérivant par rapport à p_1,

$$\begin{aligned}& \frac{\partial \mu'}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \mu'}{\partial z} + f\frac{\partial \mu'}{\partial p_1} + \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial z}q_1 + \frac{\partial c}{\partial z} \\ & \quad + ab + \frac{1}{X}\left[h\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial z}q_1 + \frac{\partial c}{\partial z} + ab\right] - \frac{b}{X}(h+1)\frac{\partial a}{\partial z} = 0,\end{aligned}$$

en remplaçant μ' par l'expression trouvée et en faisant $\frac{h+1}{X} = -1$,

$$aX_1 + \frac{\partial u}{\partial y} + q_1\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial z}q_1 + \frac{\partial c}{\partial z}$$
$$+ ab + \frac{1}{X}\left[h\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial z}q_1 + \frac{\partial c}{\partial z} + ab\right] + b\frac{\partial a}{\partial z} = 0.$$

Cette équation se décompose en deux :

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial b}{\partial z}\left(1 + \frac{1}{X}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + aX_1 + \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial z} + ab + \frac{1}{X}\left[h\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial z} + ab\right] + b\frac{\partial a}{\partial z} = 0;$$

de la première on tire, par intégration,

$$u + b\left(1 + \frac{1}{X}\right) = v(x, y).$$

En portant cette expression dans la deuxième et en tenant compte des valeurs de b et c, on constate facilement qu'elle se réduit à

$$aX_1 + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial x}\left(1 + \frac{h}{X}\right) - \frac{b}{X}\frac{\partial a}{\partial z} = 0.$$

Si l'on remarque que dans le cas actuel $1 + \frac{h}{X} = -\frac{1}{X}$, la relation précédente prend la forme

$$\frac{\partial a}{\partial x} + b\frac{\partial a}{\partial z} = X_2(x)\,a + w(x, y). \tag{34}$$

D'autre part la relation (26) peut encore s'écrire

$$m_1\left(\frac{\partial a}{\partial x} + b\frac{\partial a}{\partial z}\right) + m_1 ab - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a}{\partial x} + b\frac{\partial a}{\partial z}\right) = 0,$$

d'où

$$m_1(X_2 a + w) + m_1 ab - X_2\frac{\partial a}{\partial z} = 0. \tag{35}$$

Si $X_2 \neq 0$, la condition d'intégrabilité entre cette équation et (34) s'écrit

$$a\left[2m_1\frac{b^2}{X_2} + m_1 b + m_1\frac{\partial}{\partial x}\frac{b}{X_2}\right] + 2m_1\frac{wb}{X_2} + m_1\frac{\partial}{\partial x}\frac{w}{X_2} = 0. \tag{36}$$

on en tire pour a une valeur de la forme

$$a = -e^{-z}\frac{w e^{z} + B(x, y)}{\beta e^{z} + C(x, y)}.$$

Si l'on transporte cette expression dans l'équation (35), on obtient

$$\begin{aligned}\lambda_2 e^{-z}(w e^{z} + B)(\beta e^{z} + C) - \lambda_2(w C - B\beta) \\ + (m_1\beta e^{z} + m_1\lambda_2)e^{-z}(w e^{z} + B)(\beta e^{z} + C) = m_1 w(\beta e^{z} + C)^2.\end{aligned}$$

Ce polynome en e^{z} doit être identiquement nul; le terme en e^{-z} a pour coefficient $(m_1 + 1)\lambda_2 BC$; comme nous avons supposé $\lambda_2 \neq 0$, on aura donc $BC = 0$. Les termes en e^{2z} sont identiques dans les deux membres; en écrivant l'identité des termes en e^{z} et du terme indépendant de z, on a

$$\lambda_2(m_1 + 1)w\beta + m_1\beta(B\beta - Cw) = 0,$$

$$\lambda_2(m_1 + 1)(Cw + B\beta) - \lambda_2(Cw - B\beta) = m_1 w C^2.$$

Nous savons que β n'est pas nul; w ne peut pas être nul, car s'il en était ainsi, l'équation (36) entraînerait nécessairement $a = 0$ puisque le coefficient de a est différent de zéro. Dans ces conditions, si $C = 0$, la deuxième des équations précédentes s'écrit

$$\lambda_2(m_1 + 2)B\beta = 0,$$

par suite $B = 0$.

Si c'est B qui est nul, le système précédent se réduit à

$$\lambda_2(m_1 + 2) = m_1 C, \qquad \lambda_2 C = m_1 C^2,$$

d'où l'on tire encore $C = 0$. On peut donc écrire dans les deux cas

$$a = -\frac{w}{\beta}e^{-z} = \alpha(x, y)e^{-z}.$$

Nous avons supposé $\lambda_2 \neq 0$; si λ_2 est nul, l'équation (35) se réduit à $ab + w = 0$, et l'on en déduit encore $a = \alpha(x, y)e^{-z}$. En portant cette expression dans les équations (34) et (35), on obtient les conditions

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} = \lambda_2\alpha, \qquad \alpha\beta + w = 0, \qquad (m_1 + 1)\lambda_2\alpha = 0;$$

la dernière montre que dans tous les cas $X_2 = 0$ et par suite, d'après la première, $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0$.

Dans ces conditions, l'équation proposée est de la forme

$$s = Y(y)\, e^{-z} p + \beta(x, y)\, e^{z} q + \frac{\partial \beta}{\partial z} e^{z} - \beta Y$$

ou encore

$$(37) \qquad s = \frac{\partial}{\partial x}(Y e^{-z}) + \frac{\partial}{\partial y}(\beta e^{z}) - \beta Y.$$

C'est la forme des équations de M. Moutard que nous avons déjà trouvées.

15. Dans tous les autres cas, nous avons trouvé la relation (32); on a donc

$$a = \alpha(x, y)\, e^{\omega(x,y) z} - \frac{\partial \operatorname{Log} \omega}{\partial y}, \qquad b = \beta(x, y)\, e^{z};$$

portons ces valeurs dans la relation (26). Il vient

$$e^{\omega z}\left[\frac{\partial}{\partial x}\alpha(m_1 - \omega)\right] + z \frac{\partial \omega}{\partial x} e^{\omega z} \alpha(m_1 - \omega)$$
$$+ m_1 \frac{\partial^2 \operatorname{Log} \omega}{\partial x\, \partial y} + \alpha\beta(m_1 - \omega)(1 + \omega)\, e^{(1+\omega) z} + m_1 \beta \frac{\partial \operatorname{Log} \omega}{\partial y} e^{z} = 0.$$

Si $1 + \omega = 0$, la relation précédente se réduit à $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0$, puisque $m_1 > 1$ par hypothèse. Nous retrouvons dans ce cas l'équation précédente (37). Si $(1 + \omega) \neq 0$, la relation précédente ne sera identiquement vérifiée que si l'on a $m_1 = \omega$.

Dans ce cas, on aura donc

$$(38) \qquad a = \alpha e^{m_1 z}, \qquad b = \beta e^{z}, \qquad c = \frac{\partial \beta}{\partial y} e^{z} + \alpha\beta e^{(1+m_1) z}.$$

Il est clair que si nous avions pris les équations (I)′ et (II) au lieu de (I) et (II)′, nous aurions trouvé

$$a = \alpha(x, y)\, e^{z}, \qquad b = \beta(x, y)\, e^{m z}, \qquad c = \frac{\partial \alpha}{\partial x} e^{z} + \alpha\beta e^{(1+m) z},$$

en appelant m l'ordre du dénominateur de l'invariant relatif au système (I) et sachant que $m > 1$.

Il est facile de voir que nous sommes dans un cas analogue à celui du paragraphe 4 précédent; les formules qui donnent a et b sont les mêmes, en supposant $m_1 = 1$, et la valeur de c précédente s'obtient en faisant dans la formule (12)

$$m_1 = 1, \qquad H = -\frac{1}{m}\frac{\partial \beta}{\partial y}, \qquad K = 0.$$

Or nous avons étudié ce cas en faisant intervenir exclusivement les conditions tirées de l'existence de l'invariant du système (I) dont le dénominateur est d'ordre m. Les calculs et les raisonnements peuvent donc se répéter ici sans y rien changer : or nous avons trouvé dans tous les cas que la possibilité du problème exigeait la relation

$$m_1(m_1 + m)(m + 1)(m - 2) = 0;$$

nous n'avons donc à étudier que le cas $m = 2$.

Dans ce cas, en appelant $p_2 + \psi(x, y, z, p_1)$ le dénominateur du premier invariant, on aura

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \psi}{\partial z} + (ap_1 + bq_1 + c)\frac{\partial \psi}{\partial p_1} + \frac{\partial f}{\partial x} + p_1 \frac{\partial f}{\partial z} + bf = \psi a;$$

d'après la remarque (I), on doit avoir

$$\psi = u(x, y, z)p_1^2 + v(x, y, z)p_1 + w(x, y, z);$$

en portant cette expression dans l'équation précédente et en exprimant que c'est une identité en p_1, on trouve facilement

$$u = -1, \qquad v = \lambda(x),$$
$$\frac{\partial w}{\partial y} + q_1 \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda(bq_1 + c) + \frac{\partial b}{\partial x} q_1 + \frac{\partial c}{\partial x} + b(bq_1 + c) = aw,$$

qui se décompose en deux :

$$\frac{\partial w}{\partial z} + \lambda b + \frac{\partial b}{\partial x} + b^2 = 0,$$
$$\frac{\partial w}{\partial y} + \lambda c + \frac{\partial c}{\partial x} + bc = aw.$$

Comme on a $b = \beta(x, y)e^{2z}$, la première s'intègre facilement; on en tire

$$w + \frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\lambda}{2}b + \frac{1}{4}b^2 = w_1(x, y);$$

en portant dans la deuxième on obtient, après quelques réductions,

$$\begin{aligned}\frac{\partial w_1}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 b}{\partial x\,\partial y} + \frac{\lambda}{2}\frac{\partial b}{\partial y} + \frac{1}{2}b\frac{\partial b}{\partial y} \\ + \lambda\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\lambda}{2}ab + \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \frac{a}{2}\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{3ab^2}{4} - aw_1.\end{aligned}$$

Si l'on remplace a et b par leurs valeurs, on constate que cette identité est impossible, à cause de la présence du terme en ab^2.

Par conséquent, dans ce cas, il ne peut exister d'équation satisfaisant aux hypothèses, autre que l'équation (31) qui est une forme particulière des équations de M. Moutard.

16. *Troisième cas.* — Les dénominateurs des invariants sont tous deux d'ordre 1.

On a les équations (I) et (I)', c'est-à-dire qu'il existe deux fonctions $A_1(x, y, z, p_1)$ et $B_1(x, y, z, q_1)$ qui vérifient identiquement les relations

$$\frac{\partial A_1}{\partial y} + q_1\frac{\partial A_1}{\partial z} + (ap_1 + bq_1 + c)\frac{\partial A_1}{\partial p_1} = aA_1,$$

$$\frac{\partial B_1}{\partial x} + p_1\frac{\partial B_1}{\partial z} + (ap_1 + bq_1 + c)\frac{\partial B_1}{\partial q_1} = bB_1.$$

M. Goursat a montré (¹) que dans ce cas l'équation peut se ramener à la forme

$$s = a(x, y, z)p_1 q_1. \tag{39}$$

En effet, en posant

$$H = \frac{\dfrac{\partial c}{\partial z} + ab - \dfrac{\partial b}{\partial y}}{\dfrac{\partial a}{\partial z}}, \qquad K = \frac{\dfrac{\partial c}{\partial z} + ab - \dfrac{\partial a}{\partial x}}{\dfrac{\partial b}{\partial z}},$$

(¹) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2ᵉ série, t. I, 1899, p. 66.

les équations précédentes conduisent aux conditions

$$b = -\frac{\partial H}{\partial z}, \qquad a = -\frac{\partial K}{\partial z}, \qquad c = aH - \frac{\partial H}{\partial y} = bK - \frac{\partial K}{\partial x},$$

d'où l'on déduit

$$K\frac{\partial H}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y} = H\frac{\partial K}{\partial z} - \frac{\partial K}{\partial x};$$

c'est précisément là la condition pour que les équations

$$\frac{\partial f}{\partial x} - H\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} - K\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

soient compatibles. Si l'on prend pour nouvelle fonction inconnue $z' = U(x, y, z)$, U étant une solution du système précédent, on constate facilement que l'équation proposée prend la forme (39).

Réciproquement, pour toute équation de la forme (39), les équations (I) et (I)' admettent une solution : on peut prendre par exemple

$$A_1 = p_1, \qquad B_1 = q_1.$$

Les deux invariants cherchés seront donc de la forme

$$\varphi = \frac{p_n + \psi(x, y, z, p_1 \ldots p_{n-1})}{p_1}, \qquad \varphi_1 = \frac{q_n + \psi_1(x, y, z, p_1 \ldots p_{n-1})}{q_1}.$$

Remarquons d'ailleurs que l'équation (39) peut dans certaines conditions admettre un invariant du premier ordre; en effet, soit $\varphi(x, y, z, p_1)$ un tel invariant; on doit avoir identiquement

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + q_1\frac{\partial \varphi}{\partial z} + a p_1 q_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} = 0;$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z} + a p_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que ce système soit compatible est $\frac{\partial a}{\partial y} = 0$. Nous mettrons encore ce cas à part pour le moment, et nous supposerons tout d'abord que l'invariant du système (I) est d'ordre supérieur à 1, c'est-à-dire

$$\frac{\partial a}{\partial y} \neq 0, \qquad n \geq 2.$$

Nous aurons plusieurs cas à distinguer suivant la valeur de n.

17. Supposons d'abord $n = 2$, c'est-à-dire $\varphi = p_2 + \psi(x, y, z, p_1)$. On doit avoir identiquement

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \psi}{\partial z} + f \frac{\partial \psi}{\partial p_1} = \left(\frac{df}{dx}\right) + (p_2 + \psi) \frac{\partial f}{\partial p_1};$$

en tenant compte de l'expression de $\left(\frac{df}{dx}\right)$ calculée au Chapitre précédent (n° **11**)

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \psi}{\partial z} + a p_1 q_1 \frac{\partial \psi}{\partial p_1} + q_1 \left[\frac{\partial a}{\partial x} p_1 + p_1^2 \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right] = a q_1 \psi,$$

d'où

$$(40) \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial z} + a \left[p_1 \frac{\partial \psi}{\partial p_1} - \psi\right] + \frac{\partial a}{\partial x} p_1 + p_1^2 \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right) = 0.$$

C'est là une relation de la forme

$$(41) \qquad p_1 \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right) + \frac{\partial a}{\partial x} = \lambda(x, z, p_1) a + \mu(x, z, p_1),$$

les coefficients de λ et μ ne dépendant pas de y. On en tire, en dérivant par rapport à p_1,

$$\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 = \frac{\partial \lambda}{\partial p_1} a + \frac{\partial \mu}{\partial p_1}.$$

Les quantités $\frac{\partial \lambda}{\partial p_1}$ et $\frac{\partial \mu}{\partial p_1}$ doivent être indépendantes de p_1, sans quoi, en dérivant encore une fois par rapport à p_1, on obtiendrait

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial p_1^2} a + \frac{\partial^2 \mu}{\partial p_1^2} = 0,$$

relation impossible si $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial p_1^2}$ et $\frac{\partial^2 \mu}{\partial p_1^2}$ ne sont pas nuls, puisque nous avons supposé $\frac{\partial a}{\partial y} \neq 0$ et que λ et μ ne dépendent pas de y.

De la relation (41) on peut donc tirer

$$
(\Gamma')\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 = \alpha(x, z)\,a + \alpha_1(x, z)\\
&\text{et, par suite,}\\
&\frac{\partial a}{\partial x} = \beta(x, z)\,a + \beta_1(x, z).
\end{aligned}\right.
$$

Portons ces expressions dans l'équation (40), il vient

$$
\frac{\partial\psi}{\partial z} + a\left[p_1\frac{\partial\psi}{\partial p_1} - \psi\right] + p_1(\beta a + \beta_1) + p_1^2(\alpha a + \alpha_1) = 0.
$$

Cette relation devant être vérifiée identiquement, il faut qu'on ait, puisque $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ est nul,

$$
p_1\frac{\partial\psi}{\partial p_1} - \psi + \beta p_1 + \alpha p_1^2 = 0,
$$

$$
\frac{\partial\psi}{\partial z} + p_1\beta_1 + p_1^2\alpha_1 = 0.
$$

Écrivons la condition d'intégrabilité

$$
\frac{\partial\beta}{\partial z} + p_1\frac{\partial\alpha}{\partial z} = \alpha_1 p_1,
$$

d'où

$$
\frac{\partial\beta}{\partial z} = 0, \qquad \alpha_1 = \frac{\partial\alpha}{\partial z}.
$$

Le coefficient a doit donc vérifier le système d'équations

$$
(\Gamma)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 = \alpha(x, z)\,a + \frac{\partial\alpha}{\partial z},\\
&\frac{\partial a}{\partial x} = \lambda(x)\,a + \beta_1(x, z).
\end{aligned}\right.
$$

Nous retrouverons ce système (Γ) et nous l'interpréterons après avoir étudié tous les cas.

18. Supposons maintenant $n = 3$, c'est-à-dire

$$
\varphi = p_3 + \psi(x, y, z, p_1, p_2);
$$

on aura identiquement

$$(42)\qquad \frac{\partial\psi}{\partial y}+q_1\frac{\partial\psi}{\partial z}+f\frac{\partial\psi}{\partial p_1}+\left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial\psi}{\partial p_2}+\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)=(p_3+\psi)\frac{\partial f}{\partial p_1},$$

en remplaçant les coefficients par leur expression

$$(43)\quad \frac{\partial\psi}{\partial y}+q_1\frac{\partial\psi}{\partial z}+f\frac{\partial\psi}{\partial p_1}+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial\psi}{\partial p_2}+q_1[\mathrm{P}_2^2p_2+\mathrm{I}p_1^3+\mathrm{J}p_1^2+\mathrm{K}p_1]=\psi\frac{\partial f}{\partial p_1}.$$

Nous sommes ici dans le cas d'appliquer la remarque (II), dans le cas particulier où $h=2$, $i=-1$: ψ doit donc être un polynome du second degré en p_2, le premier terme ayant pour coefficient $\Lambda(x)\Lambda_1^{h+i}$, c'est-à-dire $\dfrac{\Lambda(x)}{2p_1}$; d'où

$$\psi=\frac{\Lambda(x)}{2p_1}p_2^2+v(x,y,z,p_1)p_2+w(x,y,z,p_1).$$

Portons cette valeur dans l'équation (43) : le terme en p_2^2 disparaît; nous aurons donc, pour exprimer que c'est une identité par rapport à p_2, deux équations dont la première est

$$\frac{\partial v}{\partial y}+q_1\frac{\partial v}{\partial z}+f\frac{\partial v}{\partial p_1}+\frac{\Lambda}{p_1}\left[\frac{\partial f}{\partial x}+p_1\frac{\partial f}{\partial z}+f\frac{\partial f}{\partial q_1}\right]+q\mathrm{P}_2^2=0.$$

qui peut s'écrire, en explicitant les termes.

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial y}+q_1\frac{\partial v}{\partial z}-ap_1q_1\frac{\partial v}{\partial p_1}+\Lambda\left[\frac{\partial a}{\partial x}+p_1\left(\frac{\partial a}{\partial z}+a^2\right)\right]q_1&\\ +\left[2\frac{\partial a}{\partial x}+3p_1\left(\frac{\partial a}{\partial z}+a^2\right)\right]q_1&=0.\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$(44)\quad \frac{\partial v}{\partial y}=0.\qquad \frac{\partial v}{\partial z}+ap_1\frac{\partial v}{\partial p_1}+\frac{\partial a}{\partial x}(\Lambda+2)+p_1\left(\frac{\partial a}{\partial z}+a^2\right)(\Lambda+3)=0.$$

Si $(\Lambda+2)(\Lambda+3)\neq 0$, cette relation a une forme analogue à (41); il est clair qu'on en déduira un système de la forme (Γ') et, en portant ces expressions (Γ') dans la relation précédente (44), on voit sans peine qu'on a encore

$$\frac{\partial\beta}{\partial z}=0,\qquad \alpha_1=\frac{\partial\alpha}{\partial z}.$$

On retrouve donc le système (Γ).

Soit maintenant $\lambda + 3 = 0$; l'équation (44) s'écrit

$$\frac{\partial a}{\partial x} = a p_1 \frac{\partial v}{\partial p_1} + \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Un raisonnement analogue à celui qui a été fait au sujet de la relation (41) montre qu'on a

$$p_1 \frac{\partial v}{\partial p_1} = m(x, z), \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = n(x, z),$$

et la condition d'intégrabilité montre que $\frac{\partial m}{\partial z} = 0$.

Donc $v = \frac{\lambda_1(x)}{p_1} + v_1(x, y)$ et l'on a

$$\text{(45)} \qquad \frac{\partial a}{\partial x} = \lambda_1(x) a + \beta_1(x, z), \qquad \beta_1 = \frac{\partial v_1}{\partial z}.$$

Écrivons l'équation qui correspond aux termes indépendants de p_2 dans l'équation (43)

$$\text{(46)} \qquad \frac{\partial w}{\partial y} + q_1 \frac{\partial w}{\partial z} + f \frac{\partial w}{\partial p_1} + v \left[\frac{\partial f}{\partial x} + p_1 \frac{\partial f}{\partial z} + f \frac{\partial f}{\partial q_1} \right] + q_1 [\mathrm{I} p_1^3 + \mathrm{J} p_1^2 + \mathrm{K} p_1] = a q_1 w.$$

d'où

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} + a p_1 \frac{\partial w}{\partial p_1} + (\lambda_1 + v_1 p_1) \left[\frac{\partial a}{\partial x} + p_1 \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 \right) \right] + \mathrm{I} p_1^3 + \mathrm{J} p_1^2 + \mathrm{K} p_1 = a w.$$

Posons $\frac{\partial^3 w}{\partial p_1^3} = w'$ et dérivons trois fois successivement par rapport à p_1 cette relation ; il vient

$$\text{(47)} \qquad \frac{\partial w'}{\partial z} + a p_1 \frac{\partial w'}{\partial p_1} + 2 a w' + 6 \mathrm{I} = 0.$$

Or, on a vu que

$$\mathrm{I} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 \right) + a \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 \right).$$

Par un raisonnement analogue à celui qui a été fait au sujet de la relation (41), on déduit de là

$$\mathrm{I} = \alpha(x, z) a + \alpha_1(x, z).$$

En transportant cette expression dans l'équation (47), celle-ci se décompose en deux, puisque $\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0$, et il vient

$$p_1 \frac{\partial w'}{\partial p_1} + 2w' + 6\alpha = 0,$$

$$\frac{\partial w'}{\partial z} + 6\alpha_1 = 0.$$

La condition d'intégrabilité donne immédiatement $\alpha_1 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \alpha}{\partial z}$.

Nous voyons que, dans ce cas, $a(x, y, z)$ doit vérifier le système (Δ) :

$$(\Delta) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial x} = X_1(x) a + \beta_1(x, z), \\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial a}{\partial z} + a^2\right) + a\left(\dfrac{\partial a}{\partial z} + a^2\right) = \alpha(x, z) a + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \alpha}{\partial z}. \end{cases}$$

Soit enfin $X + 2 = 0$ dans l'équation (44); on peut alors l'écrire

$$\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right) + a\frac{\partial v}{\partial p_1} + \frac{1}{p_1}\frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

On en tire, par un raisonnement déjà fait plusieurs fois, en tenant compte de ce que $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$,

$$(48) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial z} + a^2 &= \alpha(x, z) a + \frac{\partial \alpha}{\partial z}, \\ v &= \alpha p_1 + X_1(x). \end{aligned}$$

Dans ces conditions, l'équation (46) s'écrit

$$(49) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial y} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial w}{\partial z} + a p_1 \dfrac{\partial w}{\partial p_1} + (X_1 - \alpha p_1)\left[p_1 \dfrac{\partial a}{\partial x} + p_1^2\left(\dfrac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right] \\ \qquad + I p_1^3 + J p_1^2 + K p_1 = a w. \end{cases}$$

En tenant compte de l'équation (48), on a

$$I = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right) + a\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right) = a\left(2\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \alpha^2\right) + \alpha\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2}.$$

L'équation (49) peut donc se mettre sous la forme

$$(50)\qquad p_1^2\left[J - \alpha\frac{\partial a}{\partial x}\right] + p_1\left[K + X_1\frac{\partial a}{\partial x}\right] = \lambda(x, z, p_1)a + \mu(x, z, p_1).$$

Cette relation a une forme analogue à celle de l'équation (41); un raisonnement analogue nous permet d'en conclure

$$(51)\qquad \begin{cases} J - \alpha\dfrac{\partial a}{\partial x} = m(x, z)a + n(x, z), \\ K + X_1\dfrac{\partial a}{\partial x} = m'(x, z)a + n'(x, z). \end{cases}$$

Or on a posé

$$J = 2\frac{\partial^2 a}{\partial z\,\partial x} + 3a\frac{\partial a}{\partial x}, \qquad K = \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}.$$

En tenant compte de la relation (48) on peut écrire

$$J = (2\alpha - a)\frac{\partial a}{\partial x} + 2a\frac{\partial \alpha}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x\,\partial z},$$

et les équations (51) prennent la forme

$$(52)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial x}(\alpha - a) = \gamma(x, z)a + \delta(x, z), \\ \dfrac{\partial^2 a}{\partial x^2} + X_1\dfrac{\partial a}{\partial x} = m'(x, z)a + n'(x, z). \end{cases}$$

La condition d'intégrabilité entre ces deux équations montre immédiatement qu'on a

$$m' = 0, \qquad \frac{\partial \gamma}{\partial x} + X_1\gamma + n' = 0.$$

En posant $\dfrac{\partial a}{\partial x} + \gamma = a'$, la dernière équation (52) se réduit à

$$\frac{\partial a'}{\partial x} + X_1 a' = 0.$$

Si l'on pose $X_2 = \int_0^x X_1\,dx$, on tire de l'équation précédente

$$a' = \frac{\partial a}{\partial x} + \gamma = e^{-X_2}h(z, y),$$

et cela est vrai même si X_1 est nul, X_2 dans ce cas étant une constante quelconque. On a donc la relation

$$\frac{\partial a}{\partial x} = e^{-\lambda z} k(z, y) + \gamma(x, z).$$

Pour que cette équation soit compatible avec la première des équations (52), on voit facilement qu'il faut que $\frac{\partial k}{\partial y} = 0$; mais alors la relation précédente est de la forme

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \beta(x, z);$$

en y joignant la relation (48) déjà trouvée, on obtient précisément le système (Γ) dans le cas où $\lambda = 0$.

Donc dans tous les cas, lorsque $n = 3$, on doit satisfaire à l'un des systèmes (Γ) ou (Δ).

19. Supposons $n = 4$, c'est-à-dire

$$\varphi = p_4 + \psi(x, y, z, p_1, p_2, p_3).$$

On aura identiquement

$$(53) \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \psi}{\partial z} + f \frac{\partial \psi}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right) \frac{\partial \psi}{\partial p_2} + \left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) \frac{\partial \psi}{\partial p_3} + q_1 \left[P_3^3 p_3 + 3 p_2^2 \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right) + R p_2 + R' \right] = \psi \frac{\partial f}{\partial p_3}.$$

Nous pouvons encore appliquer ici la remarque (II), en faisant $h = 2$, $i = 1$; nous en déduisons

$$\psi = \frac{\lambda(x)}{p_1} p_3^2 + v(x, y, z, p_1, p_2) p_3 + w(x, y, z, p_1, p_2);$$

en portant cette valeur dans l'équation (53), les termes en p_3^2 disparaissent ; écrivons que le coefficient de p_3 est nul : il vient

$$(54) \qquad \frac{\partial v}{\partial y} + q_1 \frac{\partial v}{\partial z} + f \frac{\partial v}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right) \frac{\partial v}{\partial p_2} + \frac{2\lambda}{p_1} [P_2^2 p_2 + I p_1^3 + J p_1^2 + K p_1] q_1 + q_1 P_3^3 = 0.$$

La même remarque (II), appliquée à cette relation en faisant $h = 2$, $i = 0$, nous montre qu'on a

$$v = \frac{\Lambda_1(x)}{p_1^2} p_2^2 + c_1(x, y, z, p_1) p_2 + c_2(x, y, z, p_1);$$

en portant cette valeur dans l'équation (54) et en exprimant qu'on a une identité par rapport à p_2, il vient

$$(55) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial c_1}{\partial y} = 0, \\ & \frac{\partial c_1}{\partial z} + a p_1 \frac{\partial c_1}{\partial p_1} + a c_1 + \frac{2\Lambda_1}{p_1}\left[\frac{\partial a}{\partial x} + p_1\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right] \\ & \qquad + \frac{2\Lambda}{p_1}\left[2\frac{\partial a}{\partial x} + 3 p_1\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right] = 0; \end{aligned} \right.$$

$$(56) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial c_2}{\partial y} = 0, \\ & \frac{\partial c_2}{\partial z} + a p_1 \frac{\partial c_2}{\partial p_1} + c_1\left[p_1 \frac{\partial a}{\partial x} + p_1^2\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right] \\ & \qquad + 2\Lambda[I p_1^2 + J p_1 + K] + 3\frac{\partial a}{\partial x} + 4 p_1\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

L'équation (55) s'écrit encore

$$(57) \quad \begin{aligned} p_1 \frac{\partial c_1}{\partial z} + a p_1 \left| p_1 \frac{\partial c_1}{\partial p_1} + c_1 \right| + (2\Lambda_1 + 4\Lambda)\frac{\partial a}{\partial x} \\ + p_1(2\Lambda_1 + 6\Lambda)\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right) = 0. \end{aligned}$$

Si $(2\Lambda_1 + 4\Lambda)(2\Lambda_1 + 6\Lambda) \neq 0$, on tirera de cette équation, par un procédé souvent employé, un système de relations de la forme (Γ'); en portant ensuite les expressions (Γ') dans l'équation précédente, on trouve sans peine

$$\frac{\partial \beta}{\partial z} = 0, \qquad \alpha_1 = \frac{\partial \alpha}{\partial z};$$

on obtient donc le système (Γ).

20. Supposons qu'on ait $2\Lambda_1 + 6\Lambda = 0$. L'équation (57) se réduit à

$$2\Lambda \frac{\partial a}{\partial x} = a p_1 \left| \frac{\partial c_1 p_1}{\partial p_1} \right| + p_1 \frac{\partial c_1}{\partial z}.$$

Nous mettrons à part le cas où l'on aurait $X = 0$ et par suite $X_1 = 0$; ce cas sera étudié plus loin. Un raisonnement analogue à celui qui a été fait au sujet de l'équation (41) montre qu'on peut déduire de là

$$v_1 = \frac{X_2(x)}{p_1} \operatorname{Log} p_1 + \frac{u(x, z)}{p_1},$$

et par suite

$$(58) \qquad 2X \frac{\partial a}{\partial x} = a X_2 + \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Considérons l'équation (56); en y remplaçant v_1 par la valeur précédente, elle s'écrit

$$(59) \qquad \frac{\partial v_2}{\partial z} + a p_1 \frac{\partial v_2}{\partial p_1} + [X_2 \operatorname{Log} p_1 + u] \left[\frac{\partial a}{\partial x} + p_1 \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 \right) \right]$$
$$+ 2X [I p_1^2 + J p_1 + K] + 3 \frac{\partial a}{\partial x} + 4 p_1 \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 \right) = 0.$$

Posons $\dfrac{\partial^3 v_2}{\partial p_1^3} = v'_2$ et dérivons trois fois successivement par rapport à p_1 cette relation; il vient

$$\frac{\partial v'_2}{\partial z} + a \left[3 v'_2 + p_1 \frac{\partial v'_2}{\partial p_1} \right] - \frac{X_2}{p_1^2} \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 \right) + \frac{2 X_2}{p_1^3} \frac{\partial a}{\partial x} = 0.$$

En multipliant tous les termes par p_1^3, on obtient une relation de la forme (41); si $X_2 \neq 0$, on en déduit donc le système (Γ') et en portant ces relations (Γ') dans la précédente on en déduit

$$\alpha_1 = \frac{\partial \alpha}{\partial z}, \qquad \frac{\partial \beta}{\partial z} = 0,$$

c'est-à-dire encore le système (Γ).

Si $X_2 = 0$, on a

$$v_1 = \frac{u(x, z)}{p_1},$$

et le terme logarithmique disparaît dans l'équation (59).

Posons alors

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial p_1^2} = v'_2$$

et dérivons deux fois par rapport à p_1 cette équation (59); il vient

$$\frac{\partial v'_2}{\partial z} + a \left(2 v'_2 + \frac{\partial v'_2}{\partial p_1} \right) + 4 X I = 0.$$

D'où l'on tire une relation de la forme

$$I = \alpha(x, z)a + \alpha_1(x, z),$$

et en portant cette relation dans la précédente, on constate facilement qu'on doit avoir

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial \alpha}{\partial z}.$$

Par suite,

$$I = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a}{\partial z} - a^2\right) + a\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right) = \alpha(x, z)a + \frac{1}{2}\frac{\partial \alpha}{\partial z}.$$

Cette relation, jointe à la relation déjà trouvée (58), constitue un système de la forme (Δ).

21. Supposons maintenant $2\lambda_1 + 4\lambda = 0$ et mettons toujours à part le cas où l'on aurait $\lambda = \lambda_1 = 0$.

L'équation (57) se réduit alors à

$$2\lambda\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right) + a\frac{\partial v_1 p_1}{\partial p_1} + \frac{\partial v_1}{\partial z} = 0.$$

D'où l'on déduit, toujours par le même procédé,

$$v_1 p_1 = -2\lambda\alpha p_1 + \lambda_2(x)$$

et

$$\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 = \alpha(x, z)a + \frac{\partial \alpha}{\partial z}. \tag{60}$$

L'équation (56) s'écrit alors

$$\frac{\partial v_2}{\partial z} + ap_1\frac{\partial v_2}{\partial p_1} + (\lambda_2 - 2\lambda\alpha p_1)\left[\frac{\partial a}{\partial x} + p_1\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right]$$
$$+ 2\lambda[Ip_1^2 + Jp_1 + K] + 3\frac{\partial a}{\partial x} + 4p_1\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right) = 0.$$

Or, en tenant compte de la relation (60), on a

$$I = a\left(2\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \alpha^2\right) + \alpha\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2};$$

l'équation précédente peut donc se mettre sous la forme

$$2\lambda p_1\left(J - \alpha\frac{\partial a}{\partial x}\right) + 2\lambda\left[K + \frac{\lambda_2 + 3}{2\lambda}\frac{\partial a}{\partial x}\right] = \lambda(x, z, p_1)a + \mu(x, z, p_1).$$

Cette relation a absolument la forme (50), au facteur $\frac{2\Lambda}{p_1}$ près: il suffit d'y poser $\frac{\Lambda_2+3}{2\Lambda} = \Lambda_1$.

Toutes les conclusions que l'on a tirées de cette relation (50) subsistent, puisque nous avons encore

$$\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 = \alpha(x, z)\,a + \frac{\partial \alpha}{\partial z};$$

donc a vérifie dans ce cas un système de relations de la forme (Γ).

22. Supposons enfin $\Lambda = \Lambda_1 = 0$.

L'équation (57) se réduit dans ce cas à

$$\frac{\partial v_1}{\partial z} + a\left[p_1 \frac{\partial v_1}{\partial p_1} - v_1\right] = 0,$$

d'où l'on tire

$$v_1 p_1 = \Lambda_2(x).$$

L'équation (56) peut donc s'écrire

$$(61) \qquad \frac{\partial v_2}{\partial z} + a p_1 \frac{\partial v_2}{\partial p_1} + \frac{\partial a}{\partial x}(\Lambda_2 + 3) + p_1\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)(\Lambda_2 + 4) = 0.$$

Si $(\Lambda_2+3)(\Lambda_2+4) \neq 0$, on peut encore déduire de cette équation le système de relations (Γ). Si l'un ou l'autre de ces deux facteurs est nul, nous aurons recours à l'équation qui détermine w, obtenue en égalant à zéro le terme indépendant de p_3 dans l'équation (53) :

$$(62) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial w}{\partial x} + q_1 \frac{\partial w}{\partial z} - f \frac{\partial w}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial w}{\partial p_2} \\ &\quad + v q_1\left[P_2^2 p_2 + I p_1^3 + J p_1^2 + K p_1\right] \\ &\quad + q_1\left[3 p_2^2\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right) + R p_2 + R'\right] = \frac{\partial f}{\partial p_1} w. \end{aligned}$$

Nous pouvons appliquer la remarque (H), en faisant $i = -1$, $h = 3$; nous en déduisons

$$w = \frac{\Lambda_3(x)}{p_1^2} p_2^3 + w_1 p_2^2 + w_2 p_2 + w_3;$$

on a d'ailleurs

$$v = v_1 p_2 + v_2, \qquad v_1 p_1 = \Lambda_2.$$

les quantités w_1, w_2, w_3 étant des fonctions de x, y, z, p_1. En portant cette expression de w dans l'équation (62), on en tire

$$\frac{\partial w_1}{\partial y} + q_1 \frac{\partial w_1}{\partial z} + f \frac{\partial w_1}{\partial p_1} + \frac{3\lambda_3}{p_1^2}\left[p_1 \frac{\partial a}{\partial x} + p_1^2\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right] q_1$$
$$+ w_1 q_1 a + v_1 q_1 \mathrm{P}_2^2 + 3 q_1\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right) = 0,$$

d'où

$$(63)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial w_1}{\partial y} = 0, \\ &\frac{\partial w_1}{\partial z} + a\left[p_1 \frac{\partial w_1}{\partial p_1} + w_1\right] + \frac{\partial a}{\partial x}\,\frac{3\lambda_3 + 2\lambda_2}{p_1} + 3\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)(\lambda_3 + \lambda_2 + 1) = 0. \end{aligned}\right.$$

On a en outre, en partant toujours de l'équation (62),

$$\frac{\partial w_2}{\partial y} + q_1 \frac{\partial w_2}{\partial z} + f \frac{\partial w_2}{\partial p_1} + 2 w_1 q_1\left[p_1 \frac{\partial a}{\partial x} + p_1^2\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right]$$
$$+ v_2 q_1 \mathrm{P}_2^2 + v_1 q_1 [\mathrm{I} p_1^3 + \mathrm{J} p_1^2 + \mathrm{K} p_1] + q_1 \mathrm{R} = 0,$$

d'où

$$(64)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial w_2}{\partial y} = 0, \\ &\frac{\partial w_2}{\partial z} + a p_1 \frac{\partial w_2}{\partial p_1} + 2 w_1 p_1\left[\frac{\partial a}{\partial x} + p_1\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right] \\ &\qquad + v_2\left[2\frac{\partial a}{\partial x} + 3 p_1\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right] + \lambda_2[\mathrm{I} p_1^2 + \mathrm{J} p_1 + \mathrm{K}] + \mathrm{R} = 0, \end{aligned}\right.$$

avec

$$\mathrm{R} = 6\mathrm{I} p_1^2 + p_1\left[5\mathrm{J} - \frac{\partial^2 a}{\partial x\,\partial z} - a\frac{\partial a}{\partial x}\right] + 3\mathrm{K}.$$

Supposons maintenant qu'on ait $\lambda_2 + 3 = 0$. L'équation (61) montre qu'on a

$$(65)\qquad \frac{\partial a}{\partial z} + a^2 = \alpha(x, z) a + \frac{\partial \alpha}{\partial z}$$

avec

$$v_2 = -\alpha(x, z) p_1 + \lambda_4(x);$$

en portant cette expression dans l'équation (63), il est facile de voir qu'on en tirera

$$\frac{\partial a}{\partial x} = X(x)a + \beta_1(x, z),$$

à moins que $3X_3 + 2X_2 = 0$, c'est-à-dire $X_3 = 2$.

S'il en est ainsi, cette équation se réduit à

$$\frac{\partial w_1}{\partial z} + a\frac{\partial w_1 p_1}{\partial p_1} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad w_1 p_1 = X_5(x).$$

L'équation (64) s'écrit alors

$$(66)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial w_2}{\partial z} + ap_1\frac{\partial w_2}{\partial p_1} + 2X_5\left[\frac{\partial a}{\partial x} + p_1\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right] \\ &\quad + (X_4 - \alpha p_1)\left[2\frac{\partial a}{\partial x} + 3p_1\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right] - 3[\mathrm{I}p_1^2 + \mathrm{J}p_1 + \mathrm{K}] + \mathrm{R} = 0; \end{aligned}$$

en remplaçant I, J, K, R par leurs valeurs et en tenant compte de la relation (65), cette équation se ramène, après quelques calculs faciles, à la forme

$$(67)\qquad \frac{\partial a}{\partial x}[(\alpha - a)p_1 + 2X_4 + 2X_5] = \lambda(x, z, p_1)a + \mu(x, z, p_1).$$

Si $X_4 + X_5 \neq 0$, on en tire la deuxième équation (Γ). Si $X_4 + X_5 = 0$, on en déduit

$$(68)\qquad \frac{\partial a}{\partial x}(\alpha - a) = \beta(x, z)a + \gamma(x, z).$$

D'ailleurs, en portant cette expression dans l'équation en w_2, on trouve $\gamma = \frac{\partial \beta}{\partial z}$. Écrivons alors les conditions d'intégrabilité entre les équations (65) et (68); on trouve sans difficulté que deux de ces conditions sont

$$2\beta + \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \beta}{\partial z} + 3\gamma = \alpha\frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x\,\partial z};$$

d'où l'on déduit

$$\alpha\frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x\,\partial z} = 0.$$

On a par suite

$$\beta = -\frac{1}{2}\frac{\partial \alpha}{\partial x}, \qquad \gamma = \frac{\partial \beta}{\partial z} = -\frac{1}{2}\alpha\frac{\partial \alpha}{\partial x},$$

et la relation (68) peut s'écrire

$$\frac{\partial a}{\partial x}(\alpha - a) = \frac{1}{2}\frac{\partial \alpha}{\partial x}(\alpha - a);$$

puisque $(\alpha - a)$ ne peut pas être nul, par hypothèse, on a donc

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial \alpha}{\partial x},$$

et cette équation, jointe à la relation (65), forme encore un système (Γ).

Nous opérerons de même si c'est le facteur $(\lambda_2 + 4)$ qui est nul. Dans ce cas, l'équation (61) permet d'écrire

$$(69) \qquad \frac{\partial a}{\partial x} = \lambda(x)a + \beta(x, z),$$

$$v_2 = \lambda \operatorname{Log} p_1 + v_2'(x, z), \qquad \frac{\partial v_2'}{\partial z} = \beta.$$

D'autre part, l'équation (63) permettra d'écrire la première relation (Γ), sauf toutefois si l'on a $\lambda_3 + \lambda_2 + 1 = 0$, c'est-à-dire $\lambda_3 = 3$.

Dans ce cas elle se réduit à

$$\frac{\partial w_1}{\partial z} + a\frac{\partial w_1 p_1}{\partial p_1} + \frac{a\lambda - \beta}{p_1} = 0$$

et l'on en tire

$$w_1 p_1 + \lambda \operatorname{Log} p_1 - v_2 + \lambda_4(x) = 0$$

ou encore

$$w_1 p_1 + v_2 + \lambda_4(x) = 0.$$

L'équation (64) s'écrit alors

$$\frac{\partial w_2}{\partial z} + ap_1\frac{\partial w_2}{\partial p_1} - 2(v_2 + \lambda_4)\left[\frac{\partial a}{\partial x} + p_1\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right]$$
$$+ v_2\left[2\frac{\partial a}{\partial x} - 3p_1\left(\frac{\partial a}{\partial z} - a^2\right)\right] - 4(Ip_1^2 + Jp_1 + K) + R = 0$$

ou

$$\frac{\partial w_2}{\partial z} + ap_1\frac{\partial w_2}{\partial p_1} - 2\lambda_4\left[\frac{\partial a}{\partial x} + p_1\left(\frac{\partial a}{\partial z} - a^2\right)\right]$$
$$+ p_1(\lambda \operatorname{Log} p_1 + v_2)\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right) - 4(Ip_1^2 + Jp_1 + K) + R = 0.$$

Si nous dérivons trois fois successivement cette expression par rapport à p_1, il vient, puisque R est un polynome du second degré en p_1,

$$\frac{\partial^3}{\partial p_1^3}\left(\frac{\partial w_2}{\partial z}\right)+a\frac{\partial^3}{\partial p_1^3}\left(p_1\frac{\partial w_2}{\partial p_1}\right)-\frac{X}{p_1^2}\left(\frac{\partial a}{\partial z}+a^2\right)=0.$$

Si $X \neq 0$, on tire facilement de là la première relation (Γ). Si $X = 0$ l'équation en w_2 s'écrit, en remplaçant R par sa valeur,

$$\begin{aligned}\frac{\partial w_2}{\partial z}+ap_1\frac{\partial w_2}{\partial p_1}-2X_4\left[\frac{\partial a}{\partial x}+p_1\left(\frac{\partial a}{\partial z}+a^2\right)\right]\\
+p_1v_2'\left(\frac{\partial a}{\partial z}+a^2\right)+2\mathrm{I}p_1^2+\mathrm{J}p_1-p_1\left(\frac{\partial^2 a}{\partial z\,\partial x}+a\frac{\partial a}{\partial x}\right)-\mathrm{K}=0;\end{aligned}$$

d'où, en dérivant deux fois par rapport à p_1,

$$\frac{\partial^2}{\partial p_1^2}\left(\frac{\partial w_2}{\partial z}\right)+a\frac{\partial^2}{\partial p_1^2}\left(p_1\frac{\partial w_2}{\partial p_1}\right)+4\mathrm{I}=0;$$

par suite, d'après un raisonnement souvent répété,

$$\mathrm{I}=\alpha(x,z)a+\alpha'(x,z).$$

En transportant cette valeur dans l'équation précédente, on trouve sans difficulté $\alpha'=\frac{1}{2}\frac{\partial\alpha}{\partial z}$; en joignant la relation

$$\mathrm{I}=\alpha(x,z)a+\frac{1}{2}\frac{\partial\alpha}{\partial z}$$

à la relation (69) déjà trouvée, on obtient le système (Δ).

Donc, lorsque n a l'une des valeurs 2, 3 ou 4, le coefficient $a(x,y,z)$ doit satisfaire à l'un des deux systèmes (Γ) ou (Δ).

25. Étudions maintenant le cas où $n>4$; on a alors $n-1>3$ et par suite, en appelant $p_n+\varphi(x,y,z,p_1,\ldots,p_{n-1})$ le numérateur de l'invariant,

$$(70)\quad \begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+q_1\frac{\partial\varphi}{\partial z}+f\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}+\left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial p_2}+\ldots\\
\left(\frac{d^{n-2}f}{dx^{n-2}}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial p_{n-1}}+\mathrm{M}_n^{n-1}p_{n-1}+\mathrm{M}_n^{n-2}p_{n-2}+\mathrm{K}_{n-1}=\varphi\frac{\partial f}{\partial p_1},\end{aligned}$$

K_{n-1} ne dépendant pas des dérivées d'ordre supérieur à $(n-3)$.

Posons $\frac{\partial\varphi}{\partial p_{n-1}} = \varphi'$ et soit k l'ordre maximum des dérivées qui figurent dans φ'; en dérivant l'équation précédente par rapport à p_{n-1}, il vient

$$(71) \qquad \frac{\partial\varphi'}{\partial y} + q_1\frac{\partial\varphi'}{\partial z} + f\frac{\partial\varphi'}{\partial p_1} + \ldots + \left(\frac{d^{k-1}f}{dx^{k-1}}\right)\frac{\partial\varphi'}{\partial p_k} + M_{n-1}^{n-1} = 0.$$

Si $k < 1$, cette équation s'écrit, en explicitant les termes,

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial y} + q_1\frac{\partial\varphi'}{\partial z} + ap_1q_1\frac{\partial\varphi'}{\partial p_1} + \left[(n-1)\frac{\partial a}{\partial x} + np_1\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right]q_1 = 0,$$

et l'on en tire facilement le système (Γ).

Supposons $k = 2$. On a, dans ce cas,

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial y} + q_1\frac{\partial\varphi'}{\partial z} + ap_1q_1\frac{\partial\varphi'}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial\varphi'}{\partial p_2} + q_1\left[(n-1)\frac{\partial a}{\partial x} + np_1\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right] = 0.$$

La remarque (II) nous montre alors qu'on a

$$\varphi' = \frac{X(x)}{p_1}p_2 + \mu(x, y, z, p_1),$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mu}{\partial y} &+ q_1\frac{\partial\mu}{\partial z} + ap_1q_1\frac{\partial\mu}{\partial p_1}\\ &+ \frac{X}{p_1}q_1\left[\frac{\partial a}{\partial x}p_1 + p_1^2\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right] + q_1\left[(n-1)\frac{\partial a}{\partial x} + np_1\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right] = 0;\end{aligned}$$

cette équation peut s'écrire

$$(72) \quad \frac{\partial\mu}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\mu}{\partial z} + ap_1\frac{\partial\mu}{\partial p_1} + (X + n - 1)\frac{\partial a}{\partial x} + p_1(X + n)\left(\frac{\partial a}{\partial z} + \alpha^2\right) = 0.$$

Si aucun des deux coefficients $(X + n - 1)$, $(X + n)$ n'est nul, on tire de là le système (Γ) en appliquant toujours le même procédé. Il n'y a donc qu'à étudier le cas où l'un de ces termes est nul.

Si $X + n = 0$, on déduit de la relation précédente

$$(73) \quad \left\{\begin{aligned}&\frac{\partial a}{\partial x} = X_1(x)a + \beta_1(x, z),\\ &\mu = -X_1 \operatorname{Log} p_1 + \mu_1(x, z), \qquad \frac{\partial\mu_1}{\partial z} = \beta_1.\end{aligned}\right.$$

Si $\lambda + n - 1 = 0$, on déduit de la même relation

$$(74)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 = \alpha(x, z) + \frac{\partial \alpha}{\partial z},\\ &\mu = -\alpha(x, z)\,p_1 + \lambda_1(x). \end{aligned}\right.$$

Dans les deux cas, en appelant m la valeur de $-\lambda$, qui est n ou $n-1$, on a

$$\varphi = \left(\mu - \frac{m}{p_1}\,p_2\right)p_{n-1} + \varphi_1(x, y, z, p_1, \ldots, p_{n-2});$$

en portant cette expression dans l'équation (70), le terme en p_{n-1} disparaît et il reste

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + q_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + f\frac{\partial \varphi_1}{\partial p_1} + \ldots + \left(\frac{d^{n-3} f}{dx^{n-3}}\right)\frac{\partial \varphi_1}{\partial p_{n-2}}\\ &\qquad + \left(\mu - \frac{m}{p_1}\,p_2\right)\left[\mathrm{M}_{n}^{n-2}{}_{2}\,p_{n-2} + \ldots\right] + \mathrm{M}_{n}^{n-2}{}_{1}\,p_{n-2} + \ldots = \frac{\partial f}{\partial p_1}\,\varphi_1, \end{aligned}$$

les termes non écrits ne contenant pas les dérivées d'ordre supérieur à $(n-3)$.

Nous poserons $\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial p_{n-2}} = \varphi'_1$; en dérivant par rapport à p_{n-1} l'identité précédente, il vient

$$(75)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial \varphi'_1}{\partial y} + q_1\frac{\partial \varphi'_1}{\partial z} + f\frac{\partial \varphi'_1}{\partial p_1} + \ldots\\ &\qquad + \left(\frac{d^{h-1} f}{dx^{h-1}}\right)\frac{\partial \varphi'_1}{\partial p_h} + \left(\mu - \frac{m}{p_1}\,p_2\right)\mathrm{M}_{n-2}^{n-2} + \mathrm{M}_{n}^{n-2}{}_{1} = 0, \end{aligned}$$

h étant l'ordre maximum des dérivées dont dépend effectivement φ'_1; remarquons que si l'on remplace M_{n-2}^{n-2} et $\mathrm{M}_{n}^{n-2}{}_{1}$ par leurs expressions on a

$$\left(\mu - \frac{m}{p_1}\,p_2\right)\mathrm{M}_{n}^{n-2}{}_{2} + \mathrm{M}_{n}^{n-2}{}_{1} = q_1[\lambda p_2 + \lambda_1],$$

en posant

$$\lambda = -\frac{m}{p_1}(n-2)\frac{\partial a}{\partial x} + \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\frac{(n-1)(n-2m)}{2},$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 = {}&\mu\,\mathrm{P}_{n}^{n-2}{}_{2} + \frac{n(n-1)}{2}\,\mathrm{I}\,p_1^2\\ &+ p_1\left[(n-1)^2\frac{\partial^2 a}{\partial z\,\partial x} + \frac{n(3n-5)}{2}\,a\frac{\partial a}{\partial x}\right] + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\,\mathrm{K}, \end{aligned}$$

en conservant toujours aux symboles P, I et K la même signification (Chap. II, n° **11**); le terme λ ne peut être identiquement nul, d'après les hypothèses faites sur les valeurs de m et n, que si l'on a à la fois

$$\frac{\partial a}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial a}{\partial z} + a^2 = 0,$$

car le coefficient $(n-1)(n-2m)$ n'est nul pour aucune des deux valeurs de m. Or c'est là une forme particulière du système (Γ). Il s'ensuit que si l'on a $h < 2$ dans l'équation (75), on devra avoir $\lambda = 0$ et par suite le système précédent.

Nous pouvons donc supposer $h \geq 2$.

24. Prenons d'abord $h = 2$. On a alors

$$(76) \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + f \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_2} + q_1(\lambda p_2 + \lambda_1) = 0.$$

D'après la remarque (II), nous pouvons écrire

$$\varphi_1 = \frac{X_2(x)}{2 p_1^2} p_2^2 + u(x, y, z, p_1) p_2 + v(x, y, z, p_1);$$

en portant cette expression dans l'équation précédente et en égalant à zéro le coefficient de p_2, on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial y} + q_1 \frac{\partial u}{\partial z} + a p_1 q_1 \frac{\partial u}{\partial p_1} + a q_1 u + \frac{X_2}{p_1^2} q_1 \left[p_1 \frac{\partial a}{\partial x} - p_1^2 \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right] + \lambda q_1 = 0$$

qui peut encore s'écrire

$$(77) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ & \frac{\partial u}{\partial z} + a \frac{\partial u p_1}{\partial p_1} + \frac{\partial a}{\partial x} \frac{X_2 - m(n-2)}{p_1} \\ & \qquad - \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\left[X_2 + \frac{(n-1)(n-2m)}{2}\right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Si aucun des deux coefficients de $\frac{\partial a}{\partial x}$ et de $\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)$ n'est nul, on tirera encore de là le système (Γ); il est facile de le vérifier; supposons donc que l'un d'eux soit nul et posons $X_2 = m'$, m' étant égal suivant le cas à $m(n-2)$ ou $\frac{(2m-n)(n-1)}{2}$.

Écrivons maintenant que le terme indépendant de p_2 dans l'équation (76) est nul :

$$\frac{\partial v}{\partial y} + q_1 \frac{\partial v}{\partial z} + f \frac{\partial v}{\partial p_1} + u q_1 \left[p_1 \frac{\partial a}{\partial x} + p_1^2 \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 \right) \right] + q_1 \lambda_1 = 0.$$

d'où l'on tire

$$(78) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ & \frac{\partial v}{\partial z} + a p_1 \frac{\partial v}{\partial p_1} + u p_1 \left[\frac{\partial a}{\partial x} + p_1 \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 \right) \right] + \mu P_{n-2}^{n-2} + \frac{n(n-1)}{2} \mathrm{I} p_1^2 \\ & \quad + p_1 \left[(n-1)^2 \frac{\partial^2 a}{\partial x \, \partial z} + \frac{n(3n-5)}{2} a \frac{\partial a}{\partial x} \right] + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \mathrm{K} = 0. \end{aligned} \right.$$

Supposons alors que $m' = m(n-2)$; l'équation (77) s'écrit

$$\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 \right) \frac{n(n-1) - 2m}{2} + a \frac{\partial u p_1}{\partial p_1} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0;$$

d'après les hypothèses faites sur les valeurs de m et n, on peut constater facilement que le coefficient $[n(n-1) - 2m]$ n'est jamais nul; on tire donc de cette relation

$$(79) \qquad \frac{\partial a}{\partial z} + a^2 = \alpha'(x, z) a + \frac{\partial \alpha'}{\partial z}.$$

Si $m = n$, cette relation, jointe à la première relation (73), forme un système (Γ).

Si $m = n - 1$, la première relation (74) comparée à celle-ci montre que $\alpha' = \alpha$; on aura alors

$$u p_1 = k \alpha p_1 + X_1'(x),$$

en posant

$$k = -\frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Portons cette expression ainsi que celle de μ dans l'équation (78); si l'on tient compte de la relation (79), on sait que I est une quantité de la forme $\alpha_1(x, z) a + \alpha_2(x, z)$; cette équation (78) prendra donc la forme

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}(x, z, p_1)a + \mathrm{B}(x, z, p_1) \\
&\quad + p_1 \left\{ \frac{\partial a}{\partial x} [k\alpha - (n-2)\alpha] + (n-1)^2 \frac{\partial^2 a}{\partial x\, \partial z} + \frac{n(3n-5)}{2} a \frac{\partial a}{\partial x} \right\} \\
&\qquad\qquad + \mathrm{X}_3(x) \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \mathrm{K} = 0.
\end{aligned}$$

On en déduit, par le procédé de calcul appliqué à l'équation (41),

$$\frac{\partial a}{\partial x} \alpha(k - n + 2) + (n-1)^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x\, \partial z} + \frac{n(3n-5)}{2} a \frac{\partial a}{\partial x} = \beta(x, z)a + \gamma(x, z).$$

$$\mathrm{K} = \mathrm{X}(x) \frac{\partial a}{\partial x} + m(x, z)a + n(x, z).$$

Si l'on tient compte de la relation (79), en faisant $\alpha' = \alpha$ et en remplaçant k par sa valeur, on peut voir que la première de ces relations s'écrit aussi

$$\frac{n^2 - 3n + 4}{2} \frac{\partial a}{\partial x}(\alpha - a) = \beta(x, z)a + \gamma(x, z).$$

Le coefficient $(n^2 - 3n + 4)$ n'est jamais nul.

Nous obtenons ainsi un système déjà étudié (52) : on a vu qu'on pouvait en déduire le système (Γ).

Supposons maintenant $m' = \frac{(2m-n)(n-1)}{2}$; l'équation (77) s'écrit

(80) $$\frac{n(n-1) - 2m}{2p_1} \frac{\partial a}{\partial x} = a \frac{\partial u p_1}{\partial p_1} + \frac{\partial u}{\partial z};$$

on en tire immédiatement

(81) $$\frac{\partial a}{\partial x} = \mathrm{X}_1(x)a + \beta_1(x, z).$$

Si $m = n - 1$, cette relation forme avec la première relation (74) un système (Γ).

Si $m = n$, l'équation (80) montre qu'on a, en posant $k = \frac{n(n-3)}{2}$,

$$u p_1 = k \mathrm{X}_1 \log p_1 + k \mu_1 + \mathrm{X}'_1(x).$$

X_1 et μ_1 représentant les mêmes fonctions que dans le système (73) :

l'équation (78) peut alors s'écrire sous la forme suivante :

$$
(80)' \quad \frac{\partial v}{\partial z} + a p_1 \frac{\partial v}{\partial p_1} + h A_1 \operatorname{Log} p_1 \left[\frac{\partial a}{\partial x} + p_1 \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 \right) \right]
$$
$$
+ A_1 \operatorname{Log} p_1 \left[(n-2) \frac{\partial a}{\partial x} + p_1 (n-1) \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 \right) \right] + \varphi(x, y, z, p_1) = 0.
$$

φ étant un polynome du second degré en p_1. Supposons $A_1 \neq 0$; si nous dérivons trois fois successivement par rapport à p_1 cette identité, en tenant compte de ce que $\frac{\partial^3}{\partial p_1^3}(p_1 \operatorname{Log} p_1) = -\frac{1}{p_1^2}$, il vient

$$
\frac{\partial^3}{\partial p_1^3}\left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) + a \frac{\partial^3}{\partial p_1^3}\left(p_1 \frac{\partial v}{\partial p_1} \right) + \frac{2}{p_1^3} \frac{\partial a}{\partial x} A_1 (h + n - 2) + \frac{A_1}{p_1^2}\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 \right)(h + n - 1) = 0.
$$

Or, on a $h + n - 1 = \frac{(n+1)(n-2)}{2}$; ce coefficient n'étant pas nul, on tire encore de là la relation

$$
\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 = \alpha(x, z) a - \frac{\partial \alpha}{\partial z};
$$

il suffit en effet de multiplier l'équation précédente par p_1^3 et de dériver ensuite par rapport à p_1. Comme nous avons déjà la relation (81), nous obtenons donc encore le système (Γ).

Faisons maintenant $A_1 = 0$; μ et $a p_1$ sont alors indépendants de p_1 et l'équation (78) prend la forme

$$
\frac{\partial v}{\partial z} + a p_1 \frac{\partial v}{\partial p_1} + \frac{n(n-1)}{2} \mathrm{I} p_1^2 + A(x, z) p_1 + B(x, z) = 0;
$$

en dérivant deux fois successivement par rapport à p_1, on en tire

$$
\frac{\partial^2}{\partial p_1^2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) + a \frac{\partial^2}{\partial p_1^2}\left(p_1 \frac{\partial v}{\partial p_1} \right) + n(n-1)\mathrm{I} = 0,
$$

et par suite

$$
\mathrm{I} = \alpha(x, z) a + \alpha_1(x, z).
$$

En portant cette expression dans l'équation précédente, on constate que la condition d'intégrabilité exige qu'on ait $\alpha_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha}{\partial z}$.

Cette relation, jointe à la relation (81), forme un système (Δ).

En définitive, lorsque $h = 2$, on a nécessairement l'un des deux systèmes (Γ) ou (Δ).

25. Considérons maintenant le cas $h = 3$. On a

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + f \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_2} + \left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_3} + q_1(\lambda p_2 + \lambda_1) = 0.$$

La remarque (II) permet d'écrire

$$\varphi_1 = \frac{X_2(x)}{p_1} p_3 + \varphi_2(x, y, z, p_1, p_2)$$

et, par suite,

$$(82) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + f \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right) \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_2} \\ &\quad + \frac{X_2}{p_1} q_1 [P_2^2 p_2 + I p_1^3 + J p_1^2 - K p_1] + q_1(\lambda p_2 + \lambda_1) = 0. \end{aligned}$$

La même remarque (II), appliquée à cette nouvelle équation, montre que

$$\varphi_2 = \frac{X_3(x)}{2 p_1^2} p_2^2 + u(x, y, z, p_1) p_2 + v(x, y, z, p_1).$$

En portant cette expression dans l'équation (82) et en écrivant qu'on a une identité en p_2, on obtient deux relations, dont la première est

$$\frac{\partial u}{\partial y} + q_1 \frac{\partial u}{\partial z} + f \frac{\partial u}{\partial p_1} + a q_1 u + q_1 \frac{X_3}{p_1^2} \left[p_1 \frac{\partial a}{\partial x} - p_1^2 \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 \right) \right] + \frac{X_2}{p_1} q_1 P_2 + q_1 \lambda = 0$$

qui s'écrit encore

$$(83) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ &\frac{\partial u}{\partial z} + a \frac{\partial u p_1}{\partial p_1} + \frac{\partial a}{\partial x} \frac{X_3 + 2 X_2 - m(n-2)}{p_1} \\ &\quad + \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 \right) \left[X_3 - 3 X_2 - \frac{(n-1)(n-2m)}{2} \right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Si aucun des coefficients de $\frac{\partial a}{\partial x}$ et $\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)$ n'est nul, les conditions qu'on tire de l'équation précédente conduisent encore au système (Γ), comme il est facile de le vérifier. Nous supposerons donc que l'un d'eux au moins est nul; les deux coefficients seront nuls à la fois si l'on a

$$\Lambda_2 = \frac{2m - n(n-1)}{2}, \qquad \Lambda_3 = m(n-4) + n(n-1).$$

La deuxième relation qu'on déduit de l'équation (82) est

$$(84) \quad \frac{\partial v}{\partial y} + q_1 \frac{\partial v}{\partial z} + f \frac{\partial v}{\partial p_1} + u p_1 q_1 \left[\frac{\partial a}{\partial x} + p_1 \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 \right) \right] + \Lambda_2 q_1 (\mathrm{I} p_1^2 + \mathrm{J} p_1 + \mathrm{K}) + q_1 \lambda_1 = 0.$$

1° Supposons $\Lambda_3 + 2\Lambda_2 = m(n-2)$ et

$$\Lambda_3 + 3\Lambda_2 = \frac{(2m-n)(n-1)}{2}.$$

On tire alors facilement de l'équation (83) la relation

$$(85) \quad \frac{\partial a}{\partial z} + a^2 = \alpha'(x, z) a + \frac{\partial \alpha'}{\partial z}.$$

Si dans ce cas $m = n$, on a en outre les relations (73) et par suite le système (Γ).

Si $m = n - 1$, on a le système (74); on en déduit $\alpha = \alpha$; en outre, en posant $\Lambda_4(x) = \Lambda_2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, on tire de l'équation (83)

$$u p_1 = -\alpha \Lambda_4 p_1 - \Lambda_5(x).$$

En tenant compte de ces relations, ainsi que de la valeur de μ qui est donnée par les relations (74), on peut constater que l'équation (84) prend la forme

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$\begin{aligned} \Lambda(x, z, p_1) a + \mathrm{B}(x, z, p_1) + p_1 \Bigg[& \Lambda_2 \mathrm{J} - \alpha \Lambda_4 \frac{\partial a}{\partial x} - \alpha(n-2) \frac{\partial a}{\partial x} \\ & + (n-1)^2 \frac{\partial a}{\partial x}(\alpha - 2a) + \frac{n(3n-5)}{2} a \frac{\partial a}{\partial x} \Bigg] \\ & + [\Lambda_5 + \Lambda_4(n-2)] \frac{\partial a}{\partial x} + \mathrm{K} \left[\Lambda_2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \right] = 0. \end{aligned}$$

En tenant compte de (85), on a

$$\mathrm{J} = 2 \frac{\partial^2 a}{\partial x \, \partial z} + 3a \frac{\partial a}{\partial x} - (2\alpha - a) \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} a + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2}.$$

On peut faire entrer dans A et B les termes $p_1\left(\frac{\partial\chi}{\partial z}a + \frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}\right)$ et dans ces conditions l'équation précédente s'écrit

$$(86)\quad \left(\Lambda_2 + \frac{n^2-3n+4}{2}\right)(\chi - a)\frac{\partial a}{\partial x}p_1$$
$$+ K\left[\Lambda_2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\right] + [\Lambda_3 - \Lambda_1(n-3)]\frac{\partial a}{\partial x} = Aa + B.$$

Le coefficient de K ne peut pas être nul dans ce cas, car il est égal à Λ_1 qui est précisément le coefficient de $\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)$ dans l'équation (83) si l'on fait $m = n - 1$.

Donc, si $\Lambda_2 + \frac{n^2-3n+4}{2} \neq 0$, on tirera de là le système déjà étudié (52) :

$$(\chi - a)\frac{\partial a}{\partial x} = \beta(x, z)a + \gamma(x, z),$$
$$K + \Lambda(x)\frac{\partial a}{\partial x} = m(x, z)a + n(x, z).$$

On a vu qu'on pouvait en déduire le système (Γ).

Supposons donc qu'on ait

$$\Lambda_2 + \frac{n^2-3n+4}{2} = 0:$$

le coefficient de K se réduit à -1, et l'on peut toujours écrire

$$K + \Lambda(x)\frac{\partial a}{\partial x} = \beta(x, z)a + \gamma(x, z).$$

En portant cette expression dans l'équation (84), il vient

$$\frac{\partial v}{\partial x} + q_1\frac{\partial v}{\partial z} + f\frac{\partial v}{\partial p_1} + up_1^2\left(\chi a - \frac{\partial\chi}{\partial z}\right)q_1$$
$$+ \Lambda_2 q_1 I p_1^2 + q_1(n-1)p_1\mu\left(\chi a + \frac{\partial\chi}{\partial z}\right) + \frac{n(n-1)}{2}Ip_1^2 q_1 = (\beta a + \gamma)q_1,$$

en outre

$$I = a\left(2\frac{\partial\chi}{\partial z} + \chi^2\right) + \chi\frac{\partial\chi}{\partial z} + \frac{\partial^2\chi}{\partial z^2};$$

en égalant à zéro le coefficient de a et le terme indépendant de a et en écrivant les conditions d'intégrabilité entre les équations obtenues, on trouve, par un calcul facile, $\frac{\partial \beta}{\partial z} = 0$. Nous écrirons $\beta = X_1$ et l'on aura les relations

$$\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 = a\alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + X\frac{\partial a}{\partial x} = X_1 a + \gamma(x, z).$$

La condition d'intégrabilité s'écrit

$$(87) \quad \begin{aligned} &-2\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial a}{\partial x} - a^2 X_1 \\ &+ a\left[X\frac{\partial \alpha}{\partial x} - 2\gamma + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}\right] + \alpha\gamma + \frac{\partial^3 \alpha}{\partial x^2\, \partial z} + X\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x\, \partial z} = X_1\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{\partial \gamma}{\partial z};\end{aligned}$$

en dérivant cette condition par rapport à x, on obtient une relation de la forme

$$(88) \quad \begin{aligned} &-4\frac{\partial a}{\partial x}\left[X_1 a + \gamma - X\frac{\partial a}{\partial x}\right] \\ &+ \frac{\partial a}{\partial x}[-2aX_1 + K(x, z)] + H(x, z)a + L(x, z) - a^2\frac{\partial X_1}{\partial x} = 0;\end{aligned}$$

en ajoutant à celle-ci la précédente multipliée par $2X$, il vient, en supposant $X \neq 0$,

$$(89) \quad \frac{\partial a}{\partial x}[-6X_1 a + K(x, z)] - a^2\left(2X_1 X + \frac{\partial X_1}{\partial x}\right) + H(x, z)a + L(x, z) = 0,$$

en changeant la signification de K, H, L.

Si $X_1 \neq 0$, on peut tirer de là

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{ka^2 + Ka + L}{a + K}, \qquad k = -\frac{1}{6}\left[2X + \frac{\partial \operatorname{Log} X_1}{\partial x}\right];$$

en écrivant la condition d'intégrabilité entre cette équation et celle qui donne $\frac{\partial a}{\partial z}$, on obtient, en chassant le dénominateur $(a + K)^2$, un polynome du quatrième degré en a dont le terme en a^4 se calcule sans difficulté : son coefficient est égal à k; on a donc nécessairement $k = 0$.

Dans ces conditions, si l'on porte la valeur de $\frac{\partial a}{\partial x}$ dans l'équation (87), en opérant de la même manière on a évidemment un polynome du quatrième degré en a, dont le terme du plus haut degré est $-X_1 a^4$; donc $X_1 = 0$. Si K n'est pas nul dans l'équation (89), on en tirera la relation

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \beta(x, z)a + \delta(x, z)$$

et, en portant cette expression dans l'équation (87) où l'on a fait $X_1 = 0$, on voit immédiatement qu'on doit avoir $\beta = 0$; le système de relations que vérifie a se ramène donc au système (Γ). Supposons $K = 0$, on vérifie facilement qu'on a

$$K = 3\left[X\frac{\partial \alpha}{\partial x} - 2\gamma + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}\right].$$

Si K est nul, l'équation (87) se réduit à la forme

$$-3\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial a}{\partial x} + H(x, z) = 0;$$

c'est une équation du second degré en $\frac{\partial a}{\partial x}$; on aura donc

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \beta(x, z)$$

et par suite encore le système (Γ).

Supposons enfin $X = 0$; si X_1 n'est pas nul, l'équation (88) donne

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{ka^2 + Ha + L}{a + K}, \qquad k = -\frac{1}{6}\frac{\partial \operatorname{Log} X_1}{\partial x}.$$

C'est la formule déjà trouvée plus haut, où l'on aurait fait $X = 0$.

Les raisonnements déjà faits prouvent qu'on a nécessairement $X_1 = 0$.

Dans ce cas, l'équation (88) s'écrit

$$\frac{\partial a}{\partial x}\left(-4\gamma + 3\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}\right) + a\frac{\partial^3 \alpha}{\partial x^3} + 2\gamma\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial^4 \alpha}{\partial x^3\,\partial z} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x\,\partial z}.$$

Si $3\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} - 4\gamma \neq 0$, on tirera de là une relation de la forme

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \beta(x, z)a + \delta(x, z)$$

et l'on montrera comme précédemment que β doit être nul, en se servant de l'équation (87). Si $3\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} = 4\gamma$, l'équation précédente doit se réduire à une identité en a, d'où les conditions

$$3\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} = 4\gamma, \qquad \frac{\partial^3 \alpha}{\partial x^3} = 0, \qquad 2\gamma\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x\,\partial z}.$$

Or, d'après la première, $\frac{\partial \gamma}{\partial x} = 0$; donc $\gamma\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0$; en comparant cette relation avec $3\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} = 4\gamma$, on voit que, dans tous les cas, $\gamma = 0$ et $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} = 0$; l'équation (87) se réduit alors à

$$-2\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial \gamma}{\partial z},$$

d'où l'on tire encore $\frac{\partial a}{\partial x} = \beta(x, z)$ et par suite le système (Γ).

2° Supposons qu'on ait dans l'équation (83)

$$X_3 + 3X_2 = \frac{(2m-n)(n-1)}{2} \qquad \text{et} \qquad X_3 + 2X_2 \neq m(n-2).$$

De cette équation (83) on déduira la relation

$$\frac{\partial a}{\partial x} = X_1 a + \beta(x, z).$$

Si $m = n - 1$, on a le système (74) et par suite le système (Γ).

Si $m = n$, les fonctions X_1 et β sont les mêmes que dans les relations (73) et l'on aura

$$\mu = X_1 \operatorname{Log} p_1 + \mu_1(x, z),$$
$$ap_1 = -X_4[X_1 \operatorname{Log} p_1 + \mu_1(x, z)] + X_5(x),$$

en posant

$$X_4 = X_2 + \frac{n(n-1)-2m}{2} = X_2 + \frac{n(n-3)}{2}.$$

L'équation (84) prend alors la forme

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} + ap_1\frac{\partial v}{\partial p_1} - X_4 X_1 \operatorname{Log} p_1 \left[\frac{\partial a}{\partial x} + p_1\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right]$$
$$+ X_1 \operatorname{Log} p_1 \left[(n-2)\frac{\partial a}{\partial x} + p_1(n-1)\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right] + \varphi(x, y, z, p_1) = 0.$$

φ étant un polynome du second degré en p_1. Cette équation est absolument analogue à l'équation (80)' : nous pouvons donc en déduire le système (Γ), sauf si l'on a $X_1[-X_4+n-1]=0$. Dans ce cas, l'équation (84) s'écrit

$$\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}+ap_1\frac{\partial v}{\partial p_1}+\mathrm{I}\,p_1^2\left(X_2+\frac{n(n-1)}{2}\right)+A(x,y,z)p_1+B(x,y,z)=0.$$

Si $-X_4+n-1=0$, le coefficient de $\mathrm{I}\,p_1^2$ est égal à $(2n-1)$; on tirera de cette équation, par le procédé de dérivation ordinaire,

$$\mathrm{I}=\alpha(x,z)\,a+\frac{1}{2}\frac{\partial\alpha}{\partial z}$$

et par suite le système (Δ).

Si c'est le facteur X_1 qui est nul, on a alors $\frac{\partial a}{\partial x}=\beta(x,z)$; si dans la relation précédente le coefficient de I n'est pas nul, les mêmes conclusions subsistent.

Supposons donc $X_2+\frac{n(n-1)}{2}=0$, on a par suite

$$X_4=-n.$$

L'équation (84) s'écrit dans ce cas, en tenant compte de la valeur de $\frac{\partial a}{\partial x}$,

$$\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial z}+ap_1\frac{\partial v}{\partial p_1}&+(X_5-X_4\mu_1)\left[\beta+p_1\left(\frac{\partial a}{\partial z}+a^2\right)\right]+X_2p_1\left[2\frac{\partial\beta}{\partial z}+3a\beta\right]\\&+X_2\frac{\partial\beta}{\partial x}+\mu_1\left[(n-2)\beta+p_1(n-1)\left(\frac{\partial a}{\partial z}+a^2\right)\right]\\&+p_1\left[(n-1)^2\frac{\partial\beta}{\partial z}+\frac{n(3n-5)}{2}a\beta\right]+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\frac{\partial\beta}{\partial x}=0.\end{aligned}$$

Le coefficient de $p_1\left(\frac{\partial a}{\partial z}+a^2\right)$ est

$$X_5-X_4\mu_1+(n-1)\mu_1=X_5+\mu_1(2n-1);$$

s'il n'est pas nul on en tirera

$$\frac{\partial a}{\partial z}+a^2=\alpha(x,z)\,a+\frac{\partial\alpha}{\partial z}$$

et par suite le système (Γ); s'il est nul, c'est que $\frac{\partial \mu_1}{\partial z} = 0$ et par suite $\beta = 0$ d'après les équations (74); donc $\frac{\partial a}{\partial x} = 0$.

Nous étudierons ce cas en dernier lieu.

3° Supposons maintenant que les deux coefficients de $\frac{\partial a}{\partial x}$ et $\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)$ dans l'équation (83) soient nuls simultanément :

$$X_2 = \frac{2m - n(n-1)}{2}, \qquad X_3 = m(n-4) + n(n-1).$$

On en déduit $up_1 = X_4(x)$, X_4 étant une nouvelle fonction inconnue.

Si $m = n$, l'équation (84) peut se mettre sous la forme

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial z} + ap_1\frac{\partial v}{\partial p_1} + \mathrm{I}p_1^2\left[X_2 + \frac{n(n-1)}{2}\right] \\ + X_1 \operatorname{Log} p_1\left[\frac{\partial a}{\partial x}(n-2) + p_1(n-1)\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right] \\ + A(x, y, z)p_1 + B(x, y, z) = 0.\end{aligned}$$

Si $X_1 \neq 0$, on en déduira, comme on l'a fait pour l'équation (80)', la relation $\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 = \alpha a + \frac{\partial \alpha}{\partial z}$ et par suite, en y joignant les relations (73), le système (Γ).

Si $X_1 = 0$, comme le coefficient de I est égal à n, on obtiendra, en dérivant deux fois l'équation précédente par rapport à p_1, la relation

$$\mathrm{I} = \alpha(x, z)a + \frac{1}{2}\frac{\partial \alpha}{\partial z}$$

et, en y joignant les équations (73), on obtient le système (Δ).

Supposons maintenant $m = n - 1$: on a le système (74) et l'équation (84) s'écrit

$$\begin{aligned}A(x, z, p_1)a + B(x, z, p_1) \\ + p_1\left[X_2 \mathrm{J} - \alpha(n-2)\frac{\partial a}{\partial x} + (n-1)^2\frac{\partial^2 a}{\partial x\,\partial z} + \frac{n(3n-5)}{2}a\frac{\partial a}{\partial x}\right] \\ + \frac{\partial a}{\partial x}[X_4 + (n-1)X_1) + \left[X_2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\right]\mathrm{K} = 0.\end{aligned}$$

En remplaçant X_2 par sa valeur dans ce cas, on constate que le coefficient de K est nul; si $X_4 + (n-1)X_1$ n'est pas nul, on en déduira facilement la deuxième relation (Γ); si ce coefficient lui-même est nul, on voit facilement que la relation précédente se met sous la forme

$$(90) \qquad A(x, z, p_1)a + B(x, z, p_1) + p_1 \frac{\partial a}{\partial x}(\alpha - a) = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial a}{\partial x}(\alpha - a) = \beta(x, z)a + \gamma(x, z).$$

Un calcul facile montre, en partant toujours de l'équation (84), qu'on a

$$Aa + B \equiv \frac{\partial v}{\partial z} + p_1 a \frac{\partial v}{\partial p_1} + I p_1^2 \left(X_2 + \frac{n(n-1)}{2} \right) - \alpha p_1^2 (n-1) \left(\alpha a + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \right).$$

On en déduit immédiatement, en substituant dans l'équation (90),

$$\gamma = \frac{\partial \beta}{\partial z}.$$

On a donc le système

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial z} + a^2 \quad &= \alpha(x, z)a + \frac{\partial \alpha}{\partial z}, \\ \frac{\partial a}{\partial x}(\alpha - a) &= \beta(x, z)a + \frac{\partial \beta}{\partial z}. \end{aligned}$$

Ce système a déjà été étudié à la fin du n° **22**. Nous avons vu qu'on pouvait en tirer le système (Γ).

En résumé, lorsque $h = 3$, on a ou bien $\frac{\partial a}{\partial x} = 0$ ou bien l'un des systèmes de relations (Γ) ou (Δ).

26. Revenons à l'équation (75) et supposons qu'on ait $h = 4$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi_1'}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \varphi_1'}{\partial z} + f \frac{\partial \varphi_1'}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx} \right) \frac{\partial \varphi_1'}{\partial p_2} \\ &\qquad + \left(\frac{d^2 f}{dx^2} \right) \frac{\partial \varphi_1'}{\partial_3 p} + \left(\frac{d^3 f}{dx^3} \right) \frac{\partial \varphi_1'}{\partial p_4} + q_1(\lambda p_2 + \lambda_1) = 0. \end{aligned}$$

La remarque (II) permet d'écrire

$$\varphi_1 = \frac{X'(x)}{p_1} p_4 + \varphi_2(x, y, z, p_1, p_2, p_3),$$

et par suite

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + f \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right) \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_2} + \left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_3}$$
$$+ \frac{X'}{p_1} q_1 \left[P_3^3 p_3 + 3 p_2^2 \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 \right) + R p_2 + R' \right] + q_1(\lambda p_2 + \lambda_1) = 0.$$

Comme X' n'est pas nul par hypothèse, nous poserons $\varphi_2 = \frac{X'}{p_1} \psi$; il vient alors

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \psi}{\partial z} + f \frac{\partial \psi}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right) \frac{\partial \psi}{\partial p_2} + \left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) \frac{\partial \psi}{\partial p_3}$$
$$+ q_1 \left[P_3^3 p_3 + 3 p_2^2 \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 \right) + R p_2 + R' \right] + q_1 \frac{p_1}{X'}(\lambda p_2 + \lambda_1) = \psi \frac{\partial f}{\partial p_1}.$$

Cette équation a la même forme que l'équation (53) trouvée dans le cas $n = 4$: il suffit en effet de remplacer dans celle-ci R par $R + \frac{\lambda p_1}{X'}$ et R' par $R' + \frac{\lambda_1 p_1}{X'}$ pour retrouver la précédente.

On peut se rendre compte tout d'abord que la valeur de R' n'est intervenue à aucun moment dans la discussion de l'équation (53); quant à la valeur de R elle-même, elle n'intervient que dans le cas particulier $X = X_1 = 0$ (n° **22**), dans la discussion de l'équation (64). Il est facile de voir les modifications qui s'introduisent; si $X_2 + 3 = 0$ on a la relation

$$\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 = \alpha a + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \tag{65}$$

et, au lieu de l'équation (67), nous aurons

$$\frac{\partial a}{\partial x}[(\alpha - a)p_1 + 2X_4 + 2X_5] - \frac{m(n-2)}{X'} \frac{\partial a}{\partial x} = m(x, z, p_1)a + n(x, z, p_1);$$

le raisonnement s'achève de la même manière, en remplaçant $2X_4 + 2X_5$ par $2X_4 + 2X_5 - \frac{m(n-2)}{X'}$.

Dans le cas où $X_2 + 4 = 0$, on peut voir facilement que le calcul n'utilise que le terme en p_1^2 dans l'expression de R; or, en remplaçant R par $R + \frac{p_1}{\Lambda}\lambda$, on ne change rien au terme en p_1^2; il n'y a donc rien à changer dans ce cas et les conclusions subsistent.

27. Supposons maintenant $h > 4$. L'équation (75) s'écrit

$$\frac{\partial \varphi_1'}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \varphi_1'}{\partial z} + f \frac{\partial \varphi_1'}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right) \frac{\partial \varphi_1'}{\partial p_2} + \ldots + \left(\frac{d^{h-1} f}{dx^{h-1}}\right) \frac{\partial \varphi_1'}{\partial p_h} + q_1(\lambda p_2 + \lambda_1) = 0.$$

La remarque (II) montre qu'on peut poser $\varphi_1' = \frac{\Lambda(x)}{p_1}(p_h + \varphi_2)$, et il vient

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} &+ q_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + f \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_1} + \ldots \\ &+ \left(\frac{d^{h-2} f}{dx^{h-2}}\right) \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_{h-1}} + \left(\frac{d^{h-1} f}{dx^{h-1}}\right) + \frac{q_1 p_1}{\Lambda}(\lambda p_2 + \lambda_1) = (p_h + \varphi_2) \frac{\partial f}{\partial p_1}.\end{aligned}$$

On a ici $h - 1 > 3$; on peut donc écrire

$$\left(\frac{d^{h-1} f}{dx^{h-1}}\right) = p_h \frac{\partial f}{\partial p_1} + M_{h-1}^{h-1} p_{h-1} + M_{h-1}^{h-2} p_{h-2} + K_{h-1}.$$

L'équation précédente ne diffère donc de l'équation (70) que par le terme supplémentaire $\frac{q_1 p_1}{\Lambda}(\lambda p_2 + \lambda_1)$ qu'on peut faire entrer dans K_{h-1}, puisque nous avons $h - 2 > 2$; comme les raisonnements faits au sujet de l'équation (70) ne font pas intervenir l'expression du terme K, nous pourrons les répéter au sujet de l'équation précédente, qui est d'ordre moindre. En réduisant ainsi l'ordre de cette équation, nous arriverons nécessairement à l'un des cas étudiés jusqu'ici si l'équation (71) correspondante ne contient que les dérivées d'ordre 2 au plus; s'il n'est est pas ainsi, nous serons ramenés au cas étudié ci-après.

28. Nous avons étudié complètement le cas où l'on a $k \leqq 2$ dans l'équation (71).

Supposons maintenant $k > 2$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \varphi'}{\partial z} + f \frac{\partial \varphi'}{\partial p_1} + \ldots + \left(\frac{d^{k-1} f}{dx^{k-1}}\right) \frac{\partial \varphi'}{\partial p_k} + M_{n-1}^{n} = 0.$$

La remarque (II) permet de poser

$$\varphi' = \frac{X(x)}{p_1}[p_k + \varphi_1(x, y, z, p_1, \ldots, p_{k-1})]$$

et il vient

$$(91) \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + f \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_2} + \ldots + \left(\frac{d^{k-2}f}{dx^{k-2}}\right) \frac{\partial \varphi_1}{dp_{k-1}} + \left(\frac{d^{k-1}f}{dx^{k-1}}\right) + \frac{p_1}{X} M_{n-1}^{n-1} = (p_k + \varphi_1) \frac{\partial f}{\partial p_1}.$$

Si $k - 1 > 3$, cette équation a la forme (70), sauf modification du terme K, qui n'intervient pas dans les calculs; comme elle est d'ordre moindre, nous avons ainsi opéré une réduction dans le problème et nous pouvons faire les mêmes raisonnements à partir de l'équation précédente.

Si $k - 1 = 3$, l'équation précédente n'est autre que l'équation (53) où l'on remplacerait R' par $R' + \frac{p_1}{X} M_{n-1}^{n-1}$; comme ce terme R' n'intervient pas dans les calculs, ainsi que nous l'avons déjà remarqué, les conclusions subsistent.

Enfin si $k - 1 = 2$ l'équation précédente se déduit de l'équation (42) étudiée dans le cas $n = 3$ (n° **18**) en remplaçant dans celle-ci J par $J + \frac{n}{X}\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)$ et K par $K + \frac{n-1}{X}\frac{\partial a}{\partial x}$.

Or ces termes n'interviennent dans le calcul qu'à propos de l'équation (50); dans ce cas on a déjà trouvé, indépendamment des valeurs de J et K, la relation $\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 = \alpha a + \frac{\partial \alpha}{\partial z}$; en faisant la substitution que nous venons d'indiquer, on ne changera donc pas la forme de la relation (50) : il suffira simplement de modifier la valeur de X_1. Les conclusions qu'on a tirées de cette équation ne dépendant d'aucune hypothèse sur la valeur de X_1, subsistent donc entièrement.

29. En résumé, en supposant simplement $\frac{\partial a}{\partial y} \neq 0$, nous avons vu, dans tous les cas, que l'existence d'un invariant du système (I) entraîne soit $\frac{\partial a}{\partial x} = 0$, soit l'un des deux systèmes de relations (Γ) ou (Δ).

Nous allons montrer tout d'abord que le système (Δ) peut se ramener lui-même à un système analogue à (Γ). En effet, soit le système

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \lambda(x)\, a + \beta(x, z), \tag{92}$$

$$a\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right) = \gamma(x, z)\, a + \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma}{\partial z}. \tag{93}$$

La condition d'intégrabilité entre ces deux équations est de la forme

$$3\frac{\partial a}{\partial z}(a\lambda + \beta) + 2\lambda a^3 + 3\beta a^2 + a\mathrm{M}(x, z) + \mathrm{N}(x, z) = 0, \tag{94}$$

Si λ n'est pas nul, on peut poser $\beta = \lambda\alpha(x, z)$ et l'équation précédente peut se mettre sous la forme

$$3\frac{\partial a}{\partial z} = -2a^2 - \alpha a + \frac{\mathrm{H}(x, z)}{a + \alpha} + \mathrm{K}(x, z).$$

En écrivant la condition d'intégrabilité entre cette équation et l'équation (92), et en chassant le dénominateur $(a + \alpha)^2$ dans l'expression ainsi obtenue, on a un polynome du quatrième degré en a qui doit être identiquement nul, puisqu'on suppose $\frac{\partial a}{\partial y} \neq 0$; or le terme du quatrième degré se calcule immédiatement, son coefficient est 2λ : il faut donc nécessairement $\lambda = 0$.

Dans ce cas la relation (94), si l'on suppose $\beta \neq 0$, c'est-à-dire $\frac{\partial a}{\partial x} \neq 0$, prend la forme

$$\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 = \alpha(x, z)\, a + \alpha_1(x, z),$$

et, en portant cette expression dans la relation (93), on obtient

$$\alpha_1 + \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \alpha^2 = \gamma, \qquad 2\frac{\partial \alpha_1}{\partial z} + 2\alpha\alpha_1 = \frac{\partial \gamma}{\partial z},$$

d'où

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} + 2\alpha\frac{\partial \alpha}{\partial z} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial z} + 2\alpha\alpha_1.$$

Si l'on pose

$$\alpha_1 = \frac{\partial \alpha}{\partial z} + u(x, z),$$

cette relation se réduit à

$$(95)\qquad \frac{\partial u}{\partial z} + 2u\alpha = 0.$$

Nous pouvons donc remplacer le système Δ par le suivant :

$$(\Gamma_1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial x} = \beta(x, z), \\ \dfrac{\partial a}{\partial z} + a^2 = \alpha(x, z)\,a + \dfrac{\partial \alpha}{\partial z} + u(x, z). \end{cases}$$

Si l'on remarque que la condition d'intégrabilité entre les deux équations du système (Γ) exige $\lambda = 0$, on voit que ce système (Γ) est un cas particulier du précédent, correspondant au cas où $u = 0$.

Ainsi, en supposant $\dfrac{\partial a}{\partial x} \neq 0$ et $\dfrac{\partial a}{\partial y} \neq 0$, la considération de l'invariant du système (I) nous conduit à l'existence du système (Γ_1).

Il est clair que la considération de l'invariant du système (II) nous conduirait de même au système

$$(\Gamma_1)'\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial y} = \beta'(y, z), \\ \dfrac{\partial a}{\partial z} + a^2 = \alpha'(y, z)\,a + \dfrac{\partial \alpha'}{\partial z} + u'(y, z). \end{cases}$$

La condition pour que les équations (Γ_1) soient compatibles est

$$\frac{\partial \beta}{\partial z} = a\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} - 2\beta\right) + \alpha\beta + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x\, \partial z} + \frac{\partial u}{\partial x};$$

on en tire

$$2\beta = \frac{\partial \alpha}{\partial x},$$

c'est-à-dire

$$2\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial x}.$$

Les relations $(\Gamma_1)'$ donneraient de même $2\dfrac{\partial a}{\partial y} = \dfrac{\partial \alpha'}{\partial y}$, et par suite on a

$$2a = \alpha(x, z) + \alpha'(y, z) + Z(z);$$

en portant cette expression dans la deuxième équation (Γ_1), on obtient une relation qui peut s'écrire sous la forme

$$2\frac{\partial \alpha'}{\partial z} + \alpha'^2 + 2\alpha' Z + 2\frac{\partial Z}{\partial z} + Z^2 = 2\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \alpha^2 + 4u.$$

Ce premier membre est indépendant de x, tandis que le deuxième est indépendant de y; leur valeur commune est donc une fonction de la seule variable z, et l'on a

$$2\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \alpha^2 + 4u = Z_1(z),$$
$$2\frac{\partial \alpha'}{\partial z} + \alpha'^2 + 2\alpha' Z + 2\frac{\partial Z}{\partial z} + Z^2 = Z_1(z).$$

On aurait de même, en partant des équations $(\Gamma_1)'$,

$$2\frac{\partial \alpha'}{\partial z} + \alpha'^2 + 4u' = Z_2(z),$$
$$(96)\qquad 2\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \alpha^2 + 2\alpha Z + 2\frac{\partial Z}{\partial z} + Z^2 = Z_2(z).$$

En comparant la première et la dernière de ces relations, on voit qu'on peut écrire

$$2u = \alpha Z + Z_3(z).$$

La condition en u (95) donne alors

$$Z\frac{\partial \alpha}{\partial z} + 2Z\alpha^2 + \alpha\left[\frac{\partial Z}{\partial z} + 2Z_3\right] + \frac{\partial Z_3}{\partial z} = 0.$$

Si Z n'est pas identiquement nul, cette relation peut encore s'écrire

$$2\frac{\partial \alpha}{\partial z} + 4\alpha^2 + \alpha f(z) + \varphi(z) = 0;$$

en la retranchant de l'équation (96) on obtiendrait une équation du second degré en α : $3\alpha^2 + \alpha f(z) + \varphi(z) = 0$ et l'on aurait par suite $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0$; mais dans ce cas α ne dépendrait pas de x, ce qui est contraire à l'hypothèse.

On a donc nécessairement $Z = 0$.

D'autre part, l'équation (96) montre dans ce cas que u est une fonction de z seulement : il faut donc que u soit nul, sans quoi la relation (95) donnerait pour α une valeur indépendante de x. On aura de même $u' = 0$ et les relations trouvées en α et α' se réduisent finalement à

$$2a = \alpha(x, z) + \alpha'(y, z),$$

$$(97) \qquad 2\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \alpha^2 = 2\frac{\partial \alpha'}{\partial z} + \alpha'^2 = Z_1(z),$$

Z_1 étant une certaine fonction de la seule variable z. Nous prendrons cette fonction qui est arbitraire sous la forme

$$Z_1 = 2\frac{\partial Z_2}{\partial z} + Z_2^2.$$

Les équations (97) sont alors des équations de Riccati qui admettent la solution $Z_2(z)$; leur intégration se ramène donc à celle d'une équation linéaire. On trouve ainsi sans difficulté

$$\alpha = -\frac{Z''}{Z'} + \frac{2Z'}{Z + X},$$

$$\alpha' = -\frac{Z''}{Z'} + \frac{2Z'}{Z + Y},$$

Z étant une fonction arbitraire de z dont la valeur se déduit de Z_2, Z' et Z'' étant les dérivées première et seconde de cette fonction; X et Y sont deux fonctions arbitraires, l'une de x, l'autre de y, introduites par l'intégration.

Donc, si $\frac{\partial a}{\partial x}$ et $\frac{\partial a}{\partial y}$ sont différents de zéro, l'équation doit être de la forme

$$s = \left(-\frac{Z''}{Z'} + \frac{Z'}{Z + X} + \frac{Z'}{Z + Y}\right)pq.$$

En faisant le changement de variables défini par les équations

$$x' = X(x), \qquad y' = Y(y), \qquad z' = Z(z),$$

cette équation se ramène à la forme simple

$$(98) \qquad s = pq\left[\frac{1}{x + z} + \frac{1}{y + z}\right].$$

Cette équation a été trouvée par M. Goursat dans un Mémoire déjà cité [1] : elle admet deux intégrales intermédiaires du second ordre.

---

[1] *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. I, 1899, p. 66.

Si l'on prend pour fonction inconnue $u = \operatorname{Log}\left(\frac{x+z}{y+z}\right)$, elle devient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^u}{y-x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e^{-u}}{x-y}\right) = 0;$$

c'est encore là une équation de M. Moutard. On peut donc ramener son intégration à celle d'une équation linéaire, mais l'intégration directe de l'équation (98) ne présente pas de bien grande difficulté; on peut vérifier que l'intégrale générale de cette équation est

$$(99) \qquad z = \frac{X + Y - (xX' + yY')}{X' + Y'},$$

où X et Y sont deux fonctions arbitraires, l'une de la seule variable x, l'autre de la seule variable y; X′ et Y′ représentent les dérivées de ces fonctions par rapport à la variable correspondante.

Nous avons donc démontré le résultat suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation de la forme $s = a(x, y, z)pq$, *où* $\frac{\partial a}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial a}{\partial y}$ *sont différents de zéro, admette une intégrale générale de la première classe est qu'il existe une transformation de la forme* $z' = Z(z)$, $x' = X(x)$, $y' = Y(y)$ *qui ramène l'équation proposée à la forme* (98); *dans ce cas l'intégrale générale est donnée par la formule* (99).

50. Nous avons supposé jusqu'ici que $\frac{\partial a}{\partial x}$ et $\frac{\partial a}{\partial y}$ étaient différents de zéro.

Supposons maintenant $\frac{\partial a}{\partial x} = 0$, par exemple; en appelant $b(y, z)$ une fonction telle que $\frac{\partial \operatorname{Log} b}{\partial z} = a$, l'équation proposée s'écrit

$$s = \frac{\partial \operatorname{Log} b}{\partial z} p_1 q_1;$$

d'où, en intégrant,

$$q_1 = b(y, z)\, Y(y);$$

l'équation proposée admet donc une intégrale intermédiaire du premier ordre et son intégration se ramène à celle d'une équation différentielle ordinaire dépendant d'une fonction arbitraire de la variable indépendante.

Si nous transformons l'équation en question en une équation de la forme $s = ap + bq + c$, celle-ci admettra également un invariant du premier ordre pour le système (II) de caractéristiques : nous avons vu que dans ce cas on a $\frac{\partial b}{\partial z} = 0$, et par une transformation simple on peut ramener l'équation à $s = a(x, y, z)\, p + c(x, y, z)$.

Cette équation rentre dans le type que nous avons écarté au début de cette étude. Nous allons néanmoins terminer le calcul dans ce cas particulier afin de compléter l'étude qui a été faite des équations $s = a(x, y, z)pq$.

L'équation

$$s = ap_1 + c$$

admettra un invariant du premier ordre et du système (II) si l'on a

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial c}{\partial z}.$$

En outre le dénominateur de l'invariant du système (I) devant être du premier ordre, on a vu (n° **11**) qu'on devait avoir la relation (25),

$$c = \frac{\partial b}{\partial y} - ab,$$

qui dans ce cas donne $c = 0$ et par suite $\frac{\partial a}{\partial x} = 0$.

Nous avons donc à étudier l'équation

$$s = a(y, z)\, p_1.$$

Les expressions $\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right)$ se simplifient considérablement dans ce cas : on a, en particulier,

$$M_n^n = (n+1)p_1 \frac{\partial a}{\partial z}, \qquad M_n^{n-1} = \frac{n(n+1)}{2} p_2 \frac{\partial a}{\partial z} + \frac{n(n+1)}{2} p_1^2 \frac{\partial^2 a}{\partial z^2}.$$

Le dénominateur de l'invariant sera égal à p_1 ; soit

$$p_n + \varphi(x, y, z, p_1, \ldots, p_{n-1})$$

son numérateur. On a identiquement

$$(100) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z} + ap_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + \ldots + \left(\frac{d^{n-2} f}{dx^{n-2}}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial p_{n-1}} + \left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right) = (p_n + \varphi)\, a ;$$

n est au moins égal à 2, sans quoi on aurait $\frac{\partial a}{\partial z} = 0$ et l'équation proposée est linéaire et s'intègre immédiatement.

Si $n = 2$, on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z} + a p_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + \left(a p_2 + p_1^2 \frac{\partial a}{\partial z}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + 3 p_2 \frac{\partial a}{\partial z} + p_1^3 \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} = a \varphi.$$

La remarque (II) montre qu'on a

$$\varphi = \frac{X(x)}{2 p_1} p_2^2 + u(x, y, z, p_1) p_2 + v(x, y, z, p_1)$$

et, en appliquant toujours la même méthode de calcul, on tire de l'équation précédente l'une ou l'autre des conditions

$$(101) \qquad \frac{\partial a}{\partial z} = \alpha(y) a + \frac{\partial \alpha}{\partial y},$$

$$(102) \qquad \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} = \alpha(y) a + \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha}{\partial y}.$$

Si $n = 3$, on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + q \frac{\partial \varphi}{\partial z} + a p_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + \left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial p_3}$$
$$+ 4 p_1 \frac{\partial a}{\partial z} p_3 + 3 p_2^2 \frac{\partial a}{\partial z} + 6 p_2 p_1^2 \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} + l(x, y, z, p) = \varphi a.$$

On écrit encore, d'après la remarque (II),

$$\varphi = \frac{X}{2 p_1} p_3^2 + u(x, y, z, p_1, p_2) p_3 + v(x, y, z, p_1, p_2).$$

Une discussion absolument analogue à celle qui a été faite dans le cas précédent, mais beaucoup plus simple, montre qu'on a encore l'une des équations (101) ou (102).

Il en est de même si $n = 4$: la marche à suivre est exactement la même que dans la discussion du cas $n = 4$ au n° **19**; on arrive encore sans difficulté aux équations (101) et (102).

Si $n > 4$, en posant $\frac{\partial \varphi}{\partial p_{n-1}} = \varphi'$ et en dérivant l'équation (100) par rapport à p_{n-1}, il vient

$$(103) \qquad \frac{\partial \varphi'}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \varphi'}{\partial z} + a p_1 \frac{\partial \varphi'}{\partial p_1} + \ldots + \left(\frac{d^{k-1} f}{dx^{k-1}}\right) \frac{\partial \varphi'}{\partial p_k} + M''_{n-1} = 0,$$

en appelant k l'ordre maximum des dérivées dont dépend φ'. Si dans cette identité on a $k > 2$, la remarque (II) permet de poser

$$\varphi' = \frac{X(x)}{p_1}(p_k + \varphi_1),$$

et l'on a, en chassant le facteur $\frac{X}{p_1}$ qui est nécessairement différent de zéro,

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + q_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + ap_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial p_1} + \dots \\ + \left(\frac{d^{k-2}f}{dx^{k-2}}\right)\frac{\partial\varphi_1}{\partial p_{k-1}} + \left(\frac{d^{k-1}f}{dx^{k-1}}\right) + \frac{p_1}{X}M_{n-1}^{n-1} = (p_k + \varphi_1)a;$$

cette équation est analogue à l'équation (100), puisque $k - 1 > 1$. En posant $\frac{\partial\varphi_1}{\partial p_{k-1}} = \varphi'_1$, on en déduira

$$(104)\qquad \frac{\partial\varphi'_1}{\partial y} + q_1\frac{\partial\varphi'_1}{\partial z} + ap_1\frac{\partial\varphi'_1}{\partial p_1} + \dots + \left(\frac{d^{k-1}f}{dx^{k-1}}\right)\frac{\partial\varphi'_1}{\partial p_k} + M_{k-1}^{k-1} = 0.$$

Or, d'après les expressions de M_{n-1}^{n-1} et M_{k-1}^{k-1}, on voit qu'on a identiquement

$$kM_{n-1}^{n-1} - nM_{k-1}^{k-1} \equiv 0.$$

Si l'on pose $\theta = k\varphi' - n\varphi'_1$, on tire des équations (103) et (104)

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} + q_1\frac{\partial\theta}{\partial z} + f\frac{\partial\theta}{\partial p_1} + \dots + \left(\frac{d^{k-1}f}{dx^{k-1}}\right)\frac{\partial\theta}{\partial p_k} = 0.$$

ce qui montre que θ est un invariant d'ordre $k < n$. Or θ ne peut pas être identique à une fonction de x, puisque φ_1 est d'ordre au plus égal à $k - 1$. Si nous supposons que n est l'ordre de l'invariant d'ordre inférieur, le résultat précédent est absurde, ce qui prouve qu'on doit avoir $k = 2$ dans l'équation (103) :

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial y} + q_1\frac{\partial\varphi'}{\partial z} + ap_1\frac{\partial\varphi'}{\partial p_1} + \left(ap_2 + p_1^2\frac{\partial a}{\partial z}\right)\frac{\partial\varphi'}{\partial p_2} + np_1\frac{\partial a}{\partial z} = 0.$$

On aura encore

$$\varphi' = \frac{X(x)}{p_1}p_2 + \mu(x, y, z, p_1),$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial y} + q_1\frac{\partial\mu}{\partial z} + ap_1\frac{\partial\mu}{\partial p_1} + Xp_1\frac{\partial a}{\partial z} + np_1\frac{\partial a}{\partial z} = 0.$$

Si $\mathrm{X} + n \neq 0$, on en déduit la relation (101). Sinon on aura $\mu_1 = \mathrm{X}_1(x)$ et par suite $\varphi' = \left(\mathrm{X}_1 - \frac{n}{p_1} p_2\right)$, d'où

$$\varphi = \left(\mathrm{X}_1 - \frac{n}{p_1} p_2\right) p_{n-1} + \varphi_1(x, y, z, p_1, \ldots, p_{n-2}).$$

En portant cette expression dans l'équation (100), il vient

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + q_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + f \frac{\partial\varphi_1}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right) \frac{\partial\varphi_1}{\partial p_1} + \ldots \\ + \left(\frac{d^{n-3} f}{dx^{n-3}}\right) \frac{\partial\varphi_1}{\partial p_{n-2}} + \left(\mathrm{X}_1 - \frac{n}{p} p_2\right)\left[\mathrm{M}_{n-2}^{n-2} p_{n-2} + \ldots\right] + \mathrm{M}_{n-1}^{n-2} p_{n-2} + \ldots = a\varphi_1.\end{aligned}$$

Nous poserons $\frac{\partial\varphi_1}{\partial p_{n-2}} = \varphi'_1$ et, en dérivant l'équation précédente par rapport à p_{n-2},

$$(105) \qquad \begin{aligned}\frac{\partial\varphi'_1}{\partial y} + q_1 \frac{\partial\varphi'_1}{\partial z} + f \frac{\partial\varphi'_1}{\partial p_1} + \ldots \\ + \left(\frac{d^{h-1} f}{dx^{h-1}}\right) \frac{\partial\varphi'_1}{\partial p_h} + \left(\mathrm{X}_1 - \frac{n}{p_1} p_2\right) \mathrm{M}_{n-2}^{n-2} + \mathrm{M}_{n-1}^{n-2} = 0.\end{aligned}$$

Nous pourrons encore poser

$$\left(\mathrm{X}_1 - \frac{n}{p_1} p_2\right) \mathrm{M}_{n-2}^{n-2} + \mathrm{M}_{n-1}^{n-2} = \lambda p_2 + \lambda_1$$

avec

$$\lambda = -\frac{n(n-1)}{2} \frac{\partial a}{\partial z}, \qquad \lambda_1 = \mathrm{X}_1 (n-1) p_1 \frac{\partial a}{\partial z} + \frac{n(n-1)}{2} p_1^2 \frac{\partial^2 a}{\partial z^2}.$$

On montrerait, par une discussion absolument semblable à celle du n° **27**, que la relation précédente se ramène au cas où $h = 4$. D'autre part, si $h < 2$, l'identité (105) montre que $\lambda = 0$, c'est-à-dire $\frac{\partial a}{\partial z} = 0$, cas écarté.

Si $h = 2$,

$$\frac{\partial\varphi'_1}{\partial y} + q_1 \frac{\partial\varphi'_1}{\partial z} + a p_1 \frac{\partial\varphi'_1}{\partial p_1} + \left(a p_2 + p_1^2 \frac{\partial a}{\partial z}\right) \frac{\partial\varphi}{\partial p_2} + \lambda p_2 + \lambda_1 = 0;$$

d'où, d'après la remarque (II),

$$\varphi'_1 = \frac{\mathrm{X}(x)}{2 p_1^2} p_2^2 + u(x, y, z, p_1) p_2 + v(x, y, z, p_1);$$

en portant cette expression dans l'équation précédente et en écrivant qu'on a une identité, on retrouve les relations (101) ou (102).

Si $h=3$,

$$\frac{\partial\varphi_1'}{\partial y}+q_1\frac{\partial\varphi_1'}{\partial z}+ap_1\frac{\partial\varphi_1'}{\partial p_1}+\left(ap_2+p_1^2\frac{\partial a}{\partial z}\right)\frac{\partial\varphi_1'}{\partial p_2}$$
$$+\left(ap_3+M_2^2p_2+p_1^3\frac{\partial^2 a}{\partial z^2}\right)\frac{\partial\varphi_1'}{\partial p_3}+\lambda p_2+\lambda_1=0.$$

On écrira encore

$$\varphi_1'=\frac{X}{p_1}p_3+\varphi_2(x, y, z, p_1, p_2)$$

et

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}+q_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}+ap_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial p_1}$$
$$+\left(ap_2+p_1^2\frac{\partial a}{\partial z}\right)\frac{\partial\varphi_2}{\partial p_2}+X\left[3\frac{\partial a}{\partial z}p_2+p_1^2\frac{\partial^2 a}{\partial z^2}\right]+\lambda p_2+\lambda_1=0.$$

La remarque (II) donne dans ce cas

$$\varphi_2=\frac{X_2(x)}{2p_1^2}p_2^2+u(x, y, z, p_1)p_2+v(x, y, z, p_1);$$

le calcul se continue toujours de la même façon et l'on trouve encore les relations (101) et (102).

Enfin, si $h=4$, on posera encore

$$\varphi_1'=\frac{X}{p_1}[p_4+\varphi_2(x, y, z, p_1, p_2, p_3)]$$

et l'on aura une équation qui ne diffère de l'équation (100) dans le cas $n=4$ que par des termes dont la modification ne change pas le résultat du calcul.

Dans tous les cas, on aura donc la relation (101) ou la relation (102).

51. Supposons qu'on ait

$$\frac{\partial a}{\partial z}=\alpha(y)a+\frac{\partial\alpha}{\partial y};$$

on en tire, par intégration,

$$a = Y(y)\, e^{\alpha z} - \frac{\partial \operatorname{Log} \alpha}{\partial y};$$

en prenant pour nouvelle fonction inconnue $z' = \alpha z + \operatorname{Log} Y$, l'équation proposée prend la forme

$$(106) \qquad s = e^z p$$

qui admet les deux intégrales intermédiaires

$$q = e^z + Y(y), \qquad p_2 = p^2 + p X(x);$$

cette équation peut d'ailleurs s'intégrer sans aucune quadrature et son intégrale générale est donnée par la relation

$$e^z = \frac{Y'}{X - Y}.$$

Si l'on a la deuxième relation

$$\frac{\partial^2 a}{\partial z^2} = \alpha(y)\, a + \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha}{\partial y},$$

en posant $\alpha(y) = \omega^2(y)$, on a par intégration

$$a = Y_1(y)\, e^{\omega z} + Y_2(y)\, e^{-\omega z} - \frac{\partial \operatorname{Log} \omega}{\partial y}.$$

Prenons pour nouvelle fonction inconnue $z' = \omega z + \operatorname{Log} Y_3(y)$ et pour nouvelle variable $y : y' = Y_4(y)$; l'équation proposée devient

$$s = \frac{1}{Y'_4}\left[Y_1 Y_3 e^z + \frac{Y_2}{Y_3} e^{-z}\right] p.$$

On peut déterminer les fonctions Y_3 et Y_4 de manière qu'on ait

$$Y_1 Y_3 = Y'_4, \qquad Y_2 = Y_3 Y'_4,$$

à moins que l'une des fonctions Y_1, Y_2 ne soit nulle, ce qui ramènerait l'équation à la forme (106). Donc on peut écrire l'équation proposée sous la forme

$$(107) \qquad s = p[e^z + e^{-z}].$$

Cette équation admet une intégrale intermédiaire du premier ordre,

$q = e^z - e^{-z} + Y(y)$, et une du troisième ordre,

$$\frac{1}{p_1}\left[p_3 - \frac{3}{2}\frac{p_2^2}{p_1} - \frac{p_1^3}{2}\right] = X(x).$$

Pour l'intégrer, nous considérerons la première intégrale intermédiaire : $q = e^z - e^{-z} + Y(y)$; si l'on pose $u = e^z$, on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u^2 - 1 + Yu;$$

c'est une équation de Riccati qui peut s'intégrer précisément à cause de la présence de la fonction arbitraire Y; prenons en effet cette fonction sous la forme $Y = \frac{Y_1' + 1 - Y_1^2}{Y_1}$, Y_1 étant une nouvelle fonction arbitraire et Y_1' désignant sa dérivée; l'équation précédente admet alors la solution particulière $u = Y_1$, et en posant $u = Y_1 + v$ on ramène l'intégration à celle d'une équation linéaire, dont un coefficient dépend d'une fonction arbitraire de y.

L'intégrale générale de l'équation (107) est donnée par la formule

$$e^z = Y_1 - \frac{Y'}{X + Y},$$

X étant une fonction arbitraire de x, Y et Y_1 deux fonctions de y liées par la relation

$$\frac{1 + Y_1'}{Y_1} + Y_1 = \frac{-Y}{Y'}.$$

D'ailleurs cette équation fait partie d'un type étudié par M. Goursat [1]. Si l'on fait la transformation de Bäcklund $p = e^{z'}$, elle s'écrit

$$s' = e^{z'}\sqrt{q'^2 - 4}.$$

Si l'on pose alors

$$z = z' + 2y \qquad \text{et} \qquad y' = -e^{-4y},$$

cette équation prend la forme

$$s = e^z\sqrt{yq^2 + q}$$

---

(1) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1899, p. 71.

qui est le type (VII) des équations étudiées par M. Goursat dans le Mémoire cité.

52. Par conséquent, si une équation de la forme $s = a(y, z)p_1 q_1$ est de la première classe, on peut la réduire par un simple changement de variables de la forme

$$z' = \mathrm{A}(y, z), \qquad x' = \mathrm{X}(x), \qquad y' = \mathrm{Y}(y)$$

à l'une des formes (106) ou (107) et dans ce cas on sait effectuer l'intégration. Le problème est donc complètement résolu pour ces équations.

Dans le cas où l'équation $s = a(x, y, z)\,p + b(x, y, z)\,q + c(x, y, z)$ n'est pas réductible à la forme précédente, c'est-à-dire dans le cas où l'on ne peut pas vérifier à la fois les équations (I) et (I)$'$, si l'on a $\dfrac{\partial a}{\partial z} \neq 0$ et $\dfrac{\partial b}{\partial z} \neq 0$, nous avons vu qu'il était nécessaire, pour que l'intégrale générale soit de la première classe, que cette équation puisse se ramener à la forme

$$s = \frac{\partial}{\partial x}[\mathrm{A}(x, y)e^{z}] - \frac{\partial}{\partial y}[\mathrm{B}(x, y)e^{-z}], \tag{108}$$

et cela par un simple changement de variable de la forme

$$z' = \alpha(x, y)\,z + \beta(x, y).$$

Cette condition est en général facile à vérifier.

Les équations (108) ont été trouvées par M. Moutard en cherchant les équations qui admettent une intégrale générale de la forme

$$z = f(x, y, \mathrm{X}, \mathrm{X}', \ldots, \mathrm{X}^{(n)}, \mathrm{Y}, \mathrm{Y}', \ldots, \mathrm{Y}^{(m)}).$$

Les résultats de M. Moutard ont été démontrés par M. Cosserat[1]; on sait ainsi que l'équation (108) se ramène à une équation linéaire, qui est

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial \operatorname{Log} \mathrm{B}}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} - \mathrm{AB}\,u = 0; \tag{109}$$

---

(1) Darboux, *Théorie des surfaces*, t. IV, Note 3. — *Voir* aussi Goursat, *Leçons sur l'intégration*, etc., t. II, Chap. IX.

la correspondance entre les intégrales des deux équations est définie par les formules

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \mathrm{A}\, e^{z} + \frac{\partial \operatorname{Log} u}{\partial y}, \qquad \mathrm{B}\, e^{-z} = -\frac{\partial \operatorname{Log} u}{\partial x}.$$

M. Darboux (¹) a donné le moyen de former d'une manière explicite toutes les équations linéaires dont la suite de Laplace est limitée dans les deux sens, c'est-à-dire dont l'intégrale générale est de la première classe. Il est aisé d'en déduire toutes les équations de la forme (109), et par suite toutes les équations de la forme (108) dont l'intégrale générale est de la première classe.

55. Ainsi que nous l'avons déjà dit, nous ne développerons pas les calculs dans le cas de l'équation générale

$$s = b(x, y, z)\, q + c(x, y, z).$$

On retrouve d'ailleurs les mêmes résultats, c'est-à-dire les équations linéaires et les équations de M. Moutard, sauf toutefois lorsque l'équation considérée admet une intégrale intermédiaire du premier ordre. Dans ce cas on peut toujours l'écrire sous la forme

$$s = q\frac{\partial}{\partial z}\beta(x, y, z) + \frac{\partial \beta}{\partial y}; \tag{110}$$

elle admet l'intégrale intermédiaire $p = \beta(x, y, z) + \mathrm{X}(x)$ et l'intégration se ramène à celle d'une équation différentielle ordinaire dépendant du paramètre y et de la fonction arbitraire X. La présence de cette fonction X simplifie quelquefois l'intégration, ainsi qu'on l'a vu à propos de l'équation de Riccati (97). Il existe des équations de la forme (110) qui admettent une intégrale générale de la première classe et qui ne se ramène ni à une équation linéaire, ni à une équation de M. Moutard : on en a vu un exemple dans l'équation (107).

La détermination de toutes les équations de la forme (110) qui sont

(¹) *Théorie des surfaces*, t. II, Chap. II.

de la première classe est un peu plus difficile; elle est pourtant possible par l'application des méthodes de calcul développées précédemment et fera l'objet d'un autre Mémoire.

Contribution à l'Étude thermomécanique des tiges et des plaques;

Par M. Th. ANNYCKE.

INTRODUCTION.

1. Les théories classiques de l'élasticité et de la propagation de la chaleur dans les solides, telles qu'elles furent édifiées respectivement par leurs auteurs, n'offrent aucun point de pénétration réciproque. La première, en effet, suppose la température des corps uniforme et invariable, et ne peut atteindre, par conséquent, les déformations que provoquent des écarts sensibles de celle-ci; la seconde ne se préoccupe pas des modifications apportées à la température par les dégagements ou absorptions de chaleur qu'engendrent les déformations du milieu, que ces déformations soient d'origine thermique ou mécanique.

Pour l'étude des phénomènes thermomécaniques des solides, la soudure entre ces deux théories était indispensable : il fallait, en premier lieu, compléter les équations de l'élasticité, de façon qu'elles rendissent compte des déformations thermiques; en second lieu, reprendre l'établissement de l'équation indéfinie de la température, en tenant compte des déformations du milieu.

2. Duhamel tenta cet essai vers l'année 1835. Ses résultats, qui

furent établis dans le cas particulier d'une contexture isotrope à l'état naturel (et de l'hypothèse ancienne $\lambda = \mu$), en essayant notamment d'appliquer aux solides la distinction des deux caloriques spécifiques à volume constant et à pression constante, bien connue dès lors pour les gaz, se trouvent insérés dans deux Mémoires intitulés, l'un : *Mémoire sur le calcul des actions moléculaires développées par les changements de température dans les corps solides* (*Recueil des Savants étrangers, de l'Académie des Sciences de Paris*, t. V); l'autre : *Mémoire sur les phénomènes thermomécaniques* (*Journal de l'École Polytechnique*, XXV^e Cahier).

3. M. Boussinesq reprit ensuite les recherches de Duhamel d'une manière plus simple et plus rationnelle, en faisant appel aux principes fondamentaux de la Thermodynamique.

Après avoir établi l'expression générale du potentiel d'élasticité, en tenant compte, à la fois, et des déformations élastiques résultant de l'action des forces extérieures, et des déformations thermiques engendrées par les variations de température, M. Boussinesq démontre, d'abord, qu'à une première approximation, on peut raisonner comme si les changements modérés de température n'amenaient pas de changements de pression et réciproquement (c'est d'ailleurs ce que prouve l'expérience journalière); ensuite, qu'à une seconde approximation il faut, d'une part, compléter les équations générales de l'élasticité par l'addition de nouveaux termes, qui s'interprètent aisément lorsqu'on attribue à la température le rôle d'une pression superficielle et, à ses dérivées dans l'espace, le rôle de forces extérieures appliquées à chaque élément de volume; d'autre part, ajouter à l'équation indéfinie des températures, des termes analogues à ceux qu'introduirait l'existence d'une source intérieure fictive, traduisant la conversion du travail des déformations en chaleur.

Ces résultats, résumés dans une Note importante qui termine la XXXIV^e Leçon de sa *Théorie analytique de la chaleur*, ont été démontrés d'une façon détaillée par M. Boussinesq dans son cours de la Sorbonne en l'année 1909.

4. Entrant dans la voie des recherches inaugurées par Duhamel et

par M. Boussinesq, M. L. Roy, dans une très intéressante Thèse soutenue le 26 mai 1910 devant la Faculté des Sciences de Paris, développe la théorie des phénomènes thermomécaniques des solides *en suivant les méthodes de l'Énergétique*. Au lieu de se borner, comme l'ont fait ses devanciers, aux corps notablement étendus en toutes dimensions, il aborde également le cas des tiges et des plaques homogènes et isotropes; il établit pour ces différents milieux les équations de la température, celles du mouvement tangentiel et transversal, et détermine, à une deuxième approximation, la vitesse du son dans les corps solides, en étendant à ceux-ci l'hypothèse d'*adiabatie*, reconnue légitime pour les gaz; la thèse s'achève par l'application des théories exposées au problème des vibrations d'origine calorifique, qui accompagnent le refroidissement d'une tige libre à ses deux bouts, uniformément chauffée à l'instant initial, se refroidissant par rayonnement sur toute sa longueur et par contact à ses extrémités.

3. Le but du présent travail est de reprendre, en se plaçant au point de vue thermomécanique, l'étude des tiges et des plaques traitée par M. Boussinesq dans deux remarquables Mémoires insérés au *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, l'un en 1871, l'autre en 1879, et dans lesquels sont démontrés en toute rigueur les principes que les ingénieurs mettent à la base de leurs théories sur la *Résistance des matériaux*.

Cette Thèse comprend deux Parties. Dans la première, qui concerne les tiges, nous tenons compte, d'abord, de l'*hétérogénéité* des fibres qui sont souvent, près de l'axe, constituées autrement qu'au voisinage de la surface; la seule hypothèse que nous faisons sur leur constitution est la symétrie de contexture par rapport aux sections normales; notre point de vue est donc plus général que celui de M. L. Roy et atteint, par exemple, l'étude thermomécanique des corps laminés et des poutres en bois qui ne peuvent entrer dans la catégorie des corps homogènes et isotropes; ensuite, sans recourir aux principes de l'Énergétique, mais en admettant *qu'il existe*, à toutes les températures considérées, un *état naturel* pour chaque tronçon de la tige pris isolément, nous démontrons, tout intuitivement d'ailleurs, qu'à part certaines régions exceptionnelles, on peut admettre, à une première approximation, l'*uniformité* de la température dans toute l'étendue d'un tronçon quelconque et lui appliquer, par conséquent, *à l'instant t*, les équations *ordinaires* de l'élasticité, à condition toutefois de compter les déplacements et les déformations *à partir de l'état naturel relatif à la température* θ *correspondante*.

Cela posé, nous introduisons *explicitement* la température dans nos équations en prenant, comme terme de comparaison, non plus l'état naturel relatif à une température θ *quelconque*, mais celui qui correspond à la température *spéciale* $\theta = 0$. Dès lors, nous établissons que la température influe toujours sur l'effort d'extension ou de compression ; que les moments de flexion et les efforts tranchants dépendent de celle-ci dans le cas seulement où les propriétés thermiques des fibres longitudinales sont variables; que le couple de torsion en est indépendant : et nous arrivons ensuite à des conclusions analogues pour les vibrations longitudinales, transversales et tournantes.

L'exposé de cette première Partie se termine par l'étude des déplacements vibratoires longitudinaux d'une tige isotrope, à bouts fixes et imperméables à la chaleur, dont les deux moitiés, après avoir été initialement, l'une, chauffée, l'autre, refroidie, se remettent peu à peu en équilibre thermique entre elles et avec l'atmosphère ambiante maintenue à la température zéro. A ce sujet, nous montrons qu'*une simple dérivation* des résultats de notre problème permet de déduire ceux du problème posé par M. L. Roy. Enfin, à l'aide d'applications numériques appropriées, nous discutons les phases du phénomène de refroidissement, en insistant particulièrement sur les conditions requises pour que les vibrations, d'origine calorifique, puissent donner lieu à un son perceptible.

Dans une seconde Partie, nous étendons la méthode intuitive qui nous a servi pour les tiges, aux plaques élastiques planes, toujours dans de larges hypothèses d'hétérotropie et d'hétérogénéité de la matière suivant les petites dimensions du corps, c'est-à-dire, ici, suivant l'épaisseur, mais en y admettant encore l'*existence d'un état naturel des tronçons* à toutes les températures. Nous retrouvons notamment, comme résultats particuliers, tant pour les déplacements tangentiels que pour les déplacements transversaux, des lois que M. L. Roy avait dû, même en se bornant aux plaques homogènes et isotropes, demander au calcul des variations et à d'hypothétiques développements en série censés très rapidement convergents, dus à Poisson, mais qui ne s'appliqueraient peut-être pas facilement à des plaques d'une contexture moins spéciale.

6. C'est sous l'influence de l'enseignement de M. Boussinesq que j'ai entrepris ce travail et je dois beaucoup à ses encouragements et à ses conseils très bienveillants; qu'il daigne recevoir ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

PREMIÈRE PARTIE.

LES TIGES.

I. — Préliminaires.

1. M. Boussinesq pose à la base de son étude sur les tiges, outre les équations générales de l'élasticité, le principe essentiel que nous énoncerons de la manière suivante : Pour toutes les petites déformations d'une particule élastique, s'effectuant *à température constante* et comptées à partir de l'état naturel ou sans tension relatif à cette température, le travail de déformation est *essentiellement positif;* dans le cas où il existe un *potentiel d'élasticité*, le travail de déformation est mesuré par la variation de ce potentiel.

A l'aide de ce principe, M. Boussinesq établit, par l'application des propriétés des formes quadratiques, pour toute tige admettant comme plan de symétrie de contexture une section transversale quelconque, la quasi-nullité des actions mutuelles des fibres longitudinales dans les sens transversaux; il déduit ensuite les formules qui donnent, à une première approximation, l'*effort d'extension ou de compression, le moment de torsion, les couples de flexion et les efforts tranchants.*

Tous ces résultats sont d'ailleurs démontrés par lui, même pour le cas où il n'existerait pas de *potentiel d'élasticité*, c'est-à-dire pour le cas où les six composantes usuelles des pressions ne seraient pas les dérivées partielles d'une même fonction $\rho\Phi$ par rapport aux six déformations simples correspondantes. Mais, depuis, la certitude de l'existence de ce potentiel est devenue si complète, et il en résulte une simplification telle des théories, que nous n'hésiterons pas à l'admettre dans tout ce qui suit et à profiter des réductions de formules qu'elle permet.

2. Reprenant donc, dans cet esprit, l'étude de M. Boussinesq, cher-

chons les modifications qui doivent y être apportées lorsqu'on se place au point de vue thermomécanique, c'est-à-dire lorsqu'on tient compte des petites déformations des solides que provoquent d'assez larges variations de température.

Soit une tige mince et allongée, de section constante ou variant graduellement d'une extrémité à l'autre, homogène ou composée d'une matière dont la nature peut changer (même brusquement) dans les sens transversaux; nous admettrons cependant la symétrie de contexture par rapport aux sections normales, hypothèse qui, d'ailleurs, se trouve presque toujours vérifiée dans la pratique.

Concevons-la divisée en tronçons sensiblement prismatiques, dont chacun, limité par la surface même du corps et par deux plans parallèles menés normalement à la ligne moyenne, ait ses trois dimensions comparables entre elles.

Abstraction faite des perturbations locales résultant ou de l'introduction de sources de chaleur ou de l'application de forces exceptionnellement grandes, deux tronçons voisins d'une région quelconque de la tige peuvent être considérés comme étant dans des *conditions physiques à fort peu près identiques;* par suite, on est amené à supposer, *à une première approximation*, que les variables qui définissent l'état physique d'un tronçon, c'est-à-dire les six déformations élémentaires (∂, g) et la température θ, conservent les mêmes valeurs tout le long d'une perpendiculaire aux bases du tronçon, les variations de ces quantités ou, tout au moins, des six (∂, g) pouvant d'ailleurs être beaucoup plus considérables dans les sens transversaux. Ajoutons qu'en raison de la très grande conductibilité de la matière qui constitue la tige, comparée à celle de l'atmosphère ambiante, la température est également uniforme dans l'étendue de chaque section normale, et nous arrivons à conclure qu'*en tous les points d'un tronçon quelconque (supposé isolé) la température est la même.*

5. Il résulte donc de cette analyse préliminaire que, à une première approximation, nous aurons le droit d'appliquer au problème de l'équilibre et du mouvement d'un tronçon de tige *à l'instant t*, les équations *ordinaires* de l'élasticité qui supposent, comme on sait, la température uniforme et invariable, mais en comptant les déplacements et les déformations à partir de l'état naturel relatif à à la température θ effective.

II. — Équations de l'équilibre ou du mouvement d'un tronçon quelconque supposé parfaitement homogène dans le sens de la longueur et soustrait à toute action extérieure s'exerçant sur sa masse et sa surface latérale.

1. Soit un tronçon quelconque de la tige, considéré primitivement à l'*état naturel relatif à la température* θ (nous désignons par θ la température à l'instant t); puis *dans cet état primitif* choisissons, comme origine d'axes locaux de coordonnées, le centre de gravité de l'une des bases, centre déterminé en attribuant à chaque élément $d\sigma$ de celle-ci une masse fictive égale au produit de cet élément $d\sigma$ par le coefficient d'élasticité E de la fibre qui y passe; pour axe des x, la tangente à la fibre moyenne; pour axes Oy et Oz, deux fibres rectangulaires coïncidant avec les axes principaux d'inertie de la base en question; enfin appelons α l'angle que fait avec Oy la normale extérieure à un élément du contour limitant la section.

Les actions extérieures directement appliquées à la masse du tronçon (y compris l'inertie dans le cas du mouvement) et celles qui s'exercent sur la surface latérale, sont très peu de chose par rapport à l'ensemble des forces qui agissent sur le reste du corps et qui donnent lieu aux réactions intérieures (N, T); nous aurons donc, sous l'action de celles-ci, comme équations de l'équilibre et du mouvement d'un tronçon de tige,

(1) [1]
$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dN_x}{dx} + \frac{dT_z}{dy} + \frac{dT_y}{dz} = 0,\\ &\frac{dT_z}{dx} + \frac{dN_y}{dy} + \frac{dT_x}{dz} = 0,\\ &\frac{dT_y}{dx} + \frac{dT_x}{dy} + \frac{dN_z}{dz} = 0,\end{aligned}\right.$$

les conditions spéciales au contour étant

(2) $$T_z\cos\alpha + T_y\sin\alpha = 0,\quad N_y\cos\alpha + T_x\sin\alpha = 0,\quad T_x\cos\alpha + N_z\sin\alpha = 0.$$

[1] Nous indiquerons par des d italiques les dérivées, mêmes partielles, pour éviter toute confusion avec les ∂ désignant les dilatations linéaires.

2. Il convient de remarquer que les équations (1) et (2) sont les *seules nécessaires* au problème si la tige est *homogène* ou du moins faite d'une matière dont la densité varie graduellement dans les sens transversaux; au contraire, dans le cas d'une *variation brusque de densité dans les sens des* yz, comme il arriverait s'il s'agissait d'une tige formée de plusieurs prismes de constitution entièrement différente accolés sur toute leur longueur, il faudrait, par voie de continuité et eu égard au principe d'égalité de l'action et de la réaction, ajouter aux équations (1) et (2) *deux relations complémentaires* exprimant : l'une, l'égalité des déplacements ξ, η, ζ de part et d'autre de chaque élément de la surface de séparation de ces prismes; l'autre, l'égalité deux à deux, avec signes contraires, des pressions appliquées aux deux faces de l'élément superficiel considéré.

3. Évaluons les déformations élémentaires (∂, g) en fonction des réactions intérieures (N, T).

On sait que le potentiel d'élasticité, rapporté à l'unité de volume, d'une particule élastique quelconque, a le double de sa valeur $\rho\Phi$ définie par l'expression

$$2\rho\Phi = N_x\partial_x + N_y\partial_y + N_z\partial_z + T_x g_x + T_y g_y + T_z g_z. \tag{3}$$

C'est une forme quadratique par rapport aux six déformations (∂, g) qui renfermera le plus généralement vingt et un coefficients spécifiques différents.

Pour le présent problème, étant donnée la *symétrie de contexture* relativement au plan des yz, le potentiel $\rho\Phi$ sera la *somme de deux formes quadratiques distinctes*, l'une en $(\partial_x, \partial_y, \partial_z, g_x)$, l'autre en (g_y, g_z).

Rappelons que les déformations (∂, g) dont il s'agit sont comptées *à partir de l'état naturel correspondant à la température* θ et sont liées aux déplacements ξ, η, ζ, *comptés à partir du même état primitif*, par les équations suivantes :

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\partial_x = \frac{d\xi}{dx}, &\quad &\partial_y = \frac{d\eta}{dy}, &\quad &\partial_z = \frac{d\zeta}{dz},\\ &g_x = \frac{d\zeta}{dy} + \frac{d\eta}{dz}, &\quad &g_y = \frac{d\xi}{dz} + \frac{d\zeta}{dx}, &\quad &g_z = \frac{d\eta}{dx} + \frac{d\xi}{dy}. \end{aligned}\right.$$

La théorie générale de l'élasticité apprend également que, lorsqu'il existe un potentiel $\rho\Phi$, comme nous l'admettons ici, les six pressions (ou plutôt tensions) déformatrices sont données par

$$(5)\qquad (N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z) = \frac{d(\rho\Phi)}{d(\partial_x, \partial_y, \partial_z, g_x, g_y, g_z)}.$$

Et si, à l'inverse, on exprime $\rho\Phi$ au moyen des six pressions N, T, ce qui fait de ce potentiel un polynome homogène du second degré en $(N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z)$, il vient, comme on le sait également et comme il est démontré au paragraphe II du premier Mémoire cité de M. Boussinesq (de 1871),

$$(5\ bis)\qquad (\partial_x, \partial_y, \partial_z, g_x, g_y, g_z) = \frac{d(\rho\Phi)}{d(N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z)}.$$

Donc, dans le cas présent où la fonction $\rho\Phi$ se dédouble en deux parties, *essentiellement positives*, contenant, l'une, N_x, N_y, N_z, T_x, l'autre, T_y et T_z, nous aurons, pour exprimer les déformations par les pressions, six relations de la forme

$$(6)\qquad \begin{cases} \partial_x = A(N_x - \beta N_y - \beta' N_z - \beta'' T_x), \\ \partial_y = -\beta A N_x + 3 \text{ termes en } N_y,\ N_z,\ T_x, \\ \partial_z = -\beta' A N_x + 3 \text{ termes en } N_y,\ N_z,\ T_x, \\ g_x = -\beta'' A N_x + 3 \text{ termes en } N_y,\ N_z,\ T_x, \\ g_y = G T_y + H T_z, \\ g_z = H T_y + G' T_z. \end{cases}$$

Il est clair en effet que l'existence du potentiel $\rho\Phi$ entraîne l'égalité, deux à deux, des coefficients affectant soit N_y, N_z, T_x dans ∂_x; soit N_x dans ∂_y, ∂_z, g_x; soit enfin T_z dans g_y et T_y dans g_z.

D'ailleurs les coefficients spécifiques, tant ceux dont il vient d'être parlé que les autres, *ne dépendront pas de* θ : car leurs petites variations dues aux élévations modérées de la température n'ajouteraient, une fois multipliées par les (N, T), que des termes du second ordre; de plus, vu l'homogénéité de la matière le long d'une perpendiculaire aux bases du tronçon, ces coefficients seront tous *indépendants de* x, mais varieront généralement dans les sens des yz; enfin, nous admettrons l'hypothèse suivante, *essentielle* pour la simplification de certains raisonnements dans la suite, en vertu de laquelle *les coefficients* β, β', β'' *sont constants :* cela revient à supposer qu'il s'agit d'une tige dont les fibres, si on les isolait de manière à avoir $N_y = N_z = T_x = 0$, éprouveraient d'égales déformations latérales $(\partial_y, \partial_z, g_x) = -\partial_x(\beta, \beta', \beta'')$, sous l'effet de tractions produisant sur toutes une même dilatation longitudinale ∂_x.

III. — Démonstration de la nullité de T_x, N_z, N_y.

1. Nous avons vu que, à une première approximation, on peut admettre les égalités $\frac{d}{dx}(\partial, g) = 0$, exprimant, pour chaque tronçon, *l'uniformité* de l'état physique en tous les points d'une parallèle à l'axe des x. Il suffira toutefois, pour établir notre proposition, de partir des hypothèses suivantes fort approchées, quand elles ne sont pas rigoureuses, en tout cas plus larges que ne serait la supposition de nullité de toutes les dérivées du premier ordre en x, à savoir

$$(7) \qquad \frac{d^2}{dx^2}(\partial_x, \partial_y, \partial_z, g_x) = 0, \qquad \frac{d}{dx}(g_y, g_z) = 0.$$

Le second groupe des équations (7) s'écrit encore, en remplaçant g_y, g_z par leurs valeurs (4) et en tenant compte de ce que $\frac{d\xi}{dx} = \partial_x$,

$$(8) \qquad \frac{d^2\eta}{dx^2} = -\frac{d\,\partial_x}{dy}, \qquad \frac{d^2\zeta}{dx^2} = -\frac{d\,\partial_x}{dz}.$$

Remarquons que les premiers membres des équations (8) sont *continus* dans la section σ, même s'il s'agit d'une tige constituée par des prismes accolés; car les déplacements η, ζ étant égaux, à moins de rupture, de part et d'autre de la surface de séparation de ces prismes, il en est de même de leurs dérivées en x.

2. Cela posé, dérivons par rapport à y la première des équations (8), par rapport à z la seconde, les résultats obtenus pour les premiers membres sont respectivement $\frac{d^2\partial_y}{dx^2}$ et $\frac{d^2\partial_z}{dx^2}$; puis, inversement, dérivons l'une par rapport à z, l'autre par rapport à y, les premiers membres ainsi dérivés ont pour valeur commune $\frac{1}{2}\frac{d^2 g_x}{dx^2}$. Il en résulte donc, vu le premier groupe des équations (7), que les dérivées des termes $\frac{d^2\eta}{dx^2}$, $\frac{d^2\zeta}{dx^2}$, soit par rapport à y, soit par rapport à z, sont *nulles*, ou que ces termes ne varient pas dans les sens transversaux.

Soient η_0 et ζ_0 ([1]) les déplacements transversaux du centre de gravité O de la section σ. Nous pouvons remplacer par $\frac{d^2\eta_0}{dx^2}$ et $\frac{d^2\zeta_0}{dx^2}$ les premiers membres des équations (8); celles-ci, multipliées, la première par dy, la seconde par dz, puis ajoutées et intégrées, donnent, en désignant par ∂_0 la dilatation longitudinale de la fibre moyenne au point considéré,

$$\partial_x = \partial_0 - y\frac{d^2\eta_0}{dx^2} - z\frac{d^2\zeta_0}{dx^2}. \tag{9}$$

La formule (9) nous apprend que *les dilatations ∂_x des fibres longitudinales varient linéairement dans les sens transversaux.*

3. Passons maintenant aux deux dernières équations du système (1). Celles-ci deviennent, en remarquant que, eu égard aux égalités (6), les conditions $\frac{d}{dx}(g_y, g_z) = 0$ équivalent à poser $\frac{d}{dx}(\mathrm{T}_y, \mathrm{T}_z) = 0$,

$$\frac{d\mathrm{N}_y}{dy} + \frac{d\mathrm{T}_x}{dz} = 0, \qquad \frac{d\mathrm{T}_x}{dy} + \frac{d\mathrm{N}_z}{dz} = 0. \tag{10}$$

Multiplions-les respectivement par $\mathrm{V}\,dy\,dz$, $\mathrm{W}\,dy\,dz$, V et W désignant deux fonctions continues quelconques de y, z, puis ajoutons et intégrons dans toute l'étendue σ d'une section transversale. Il vient

$$\int\!\!\int_\sigma \left[\mathrm{V}\left(\frac{d\mathrm{N}_y}{dy} + \frac{d\mathrm{T}_x}{dz}\right) + \mathrm{W}\left(\frac{d\mathrm{T}_x}{dy} + \frac{d\mathrm{N}_z}{dz}\right)\right] dy\,dz = 0. \tag{11}$$

Or, on a identiquement

$$\mathrm{V}\left(\frac{d\mathrm{N}_y}{dy} + \frac{d\mathrm{T}_x}{dz}\right) = \frac{d}{dy}(\mathrm{V}\mathrm{N}_y) + \frac{d}{dz}(\mathrm{V}\mathrm{T}_x) - \mathrm{N}_y\frac{d\mathrm{V}}{dy} - \mathrm{T}_x\frac{d\mathrm{V}}{dz},$$

$$\mathrm{W}\left(\frac{d\mathrm{T}_x}{dy} + \frac{d\mathrm{N}_z}{dz}\right) = \frac{d}{dy}(\mathrm{W}\mathrm{T}_x) + \frac{d}{dz}(\mathrm{W}\mathrm{N}_z) - \mathrm{T}_x\frac{d\mathrm{W}}{dy} - \mathrm{N}_z\frac{d\mathrm{W}}{dz}.$$

([1]) On affectera de l'indice o tout ce qui se rapporte à la fibre moyenne ou centrale du tronçon.

Substituant ces valeurs dans l'intégrale (11), nous pouvons, par application de la formule de Green-Stokes [1], transformer les termes exactement intégrables une fois en des intégrales curvilignes étendues au contour s qui limite la section σ, et écrire, par conséquent, pour l'ensemble des termes considérés,

$$(12) \qquad \int_s [V(N_y \cos\alpha + T_x \sin\alpha) + W(T_x \cos\alpha + N_z \sin\alpha)]\, ds.$$

La formule (12) établie sans difficulté lorsque la tige est *homogène*, les fonctions N_y, N_z, T_x étant alors *continues* dans toute la section σ, subsiste, même s'il s'agit d'une tige *constituée par des prismes de nature différente accolés sur leur longueur*, quoiqu'il y ait, dans ce cas, *discontinuité* à la surface de séparation des prismes pour les tensions N_y, N_z, T_x. Notons que, dans cette dernière hypothèse, il faut, pour arriver au résultat, diviser d'abord la section σ en autant de régions partielles qu'il y a de prismes accolés; puis, les variations de N_y, N_z, T_x étant continues à l'intérieur de chacune d'elles, leur appliquer successivement la formule de Green-Stokes.

L'addition de ces intégrales curvilignes partielles nous conduit à la formule (12); car les deux éléments d'intégrale relatifs à un même arc ds' contigu à deux régions sont égaux et contraires, vu les hypothèses spéciales aux surfaces de séparation énoncées plus haut et à cause de la continuité supposée de V et W.

En raison des deux dernières conditions (2) spéciales au contour, il est clair que l'intégrale (12) est nulle, et la relation (11) devient

$$(13) \qquad \iint_\sigma \left[N_y \frac{dV}{dy} + N_z \frac{dW}{dz} + T_x\left(\frac{dV}{dz} + \frac{dW}{dy}\right)\right] d\sigma = 0.$$

Posons successivement dans cette dernière égalité

1° $\quad W = 0 \quad$ et $\quad V = y, \quad = z, \quad = y^2, \quad = yz, \quad = z^2;$

2° $\quad V = 0 \quad$ et $\quad W = z, \quad = y, \quad = z^2, \quad = zy, \quad = y^2.$

Nous obtenons neuf relations distinctes qui peuvent se condenser

---

[1] Ou plutôt de Lagrange.

en une seule formule symbolique

$$\iint_\sigma (N_y, N_z, T_x)(1, y, z)\, d\sigma = 0. \tag{14}$$

Posons encore $V = \eta$, $W = \zeta$. On déduit de l'égalité (13), en se rappelant que $\frac{d\eta}{dy} = \partial_y$, $\frac{d\zeta}{dz} = \partial_z$, $\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy} = g_x$, l'expression suivante :

$$\iint_\sigma (N_y \partial_y + N_z \partial_z + T_x g_x)\, d\sigma = 0. \tag{15}$$

4. Il nous reste à démontrer que l'équation (15) entraîne, avec (14), la nullité des composantes transversales T_x, N_z, N_y.

Nous avons vu que, pour le problème qui nous occupe, le potentiel d'élasticité $\rho\Phi$ était la somme de deux formes quadratiques distinctes, *essentiellement positives*, l'une contenant N_x, N_y, N_z, T_x; l'autre, T_y, T_z. On sait, d'autre part, que toute forme quadratique, *essentiellement positive*, peut être ramenée à une somme de carrés de formes linéaires indépendantes, les coefficients de ces divers carrés étant *tous positifs*.

Cela posé, occupons-nous de la première de ces formes, dont le double est

$$N_x \partial_x + N_y \partial_y + N_z \partial_z + T_x g_x.$$

Après y avoir remplacé les ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_x par leurs valeurs tirées de (6), développons-la en appliquant la méthode connue de réduction des formes quadratiques. Le premier terme du développement sera $A(N_x - \beta N_y - \beta' N_z - \beta'' T_x)^2$.

On retranchera ensuite de la partie restante de la forme quadratique le terme $A(\beta N_y + \beta' N_z + \beta'' T_x)^2$, puis par un procédé analogue, on obtiendra le carré d'une forme linéaire ne contenant plus que N_y, N_z, T_x, et ainsi de suite, le nombre de variables dans chaque carré diminuant toujours d'une unité.

En résumé, nous pourrons écrire

$$\begin{aligned} N_x \partial_x + N_y \partial_y + N_z \partial_z + T_x g_x = {} & A(N_x - \beta N_y - \beta' N_z - \beta'' T_x)^2 \\ & + b(N_y + \gamma N_z + \gamma' T_x)^2 + c(N_z + \gamma'' T_x)^2 + d T_x^2, \end{aligned}$$

formule dans laquelle les coefficients A, b, c, d sont *positifs*.

Or on sait que

$$\partial_x = \mathrm{A}(\mathrm{N}_x - \beta \mathrm{N}_y - \beta' \mathrm{N}_z - \beta'' \mathrm{T}_x).$$

Par suite, le premier terme du développement s'écrira encore

$$\partial_x(\mathrm{N}_x - \beta \mathrm{N}_y - \beta' \mathrm{N}_z - \beta'' \mathrm{T}_x) \quad \text{ou bien} \quad \mathrm{N}_x \partial_x - \partial_x(\beta \mathrm{N}_y + \beta' \mathrm{N}_z + \beta'' \mathrm{T}_x).$$

Nous arrivons donc finalement à l'expression de $\mathrm{N}_y \partial_y + \mathrm{N}_z \partial_z + \mathrm{T}_x g_x$ que nous cherchons :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}_y \partial_y + \mathrm{N}_z \partial_z + \mathrm{T}_x g_x = {} & \mathrm{b}(\mathrm{N}_y + \gamma \mathrm{N}_z + \gamma' \mathrm{T}_x)^2 + \mathrm{c}(\mathrm{N}_z + \gamma'' \mathrm{T}_x)^2 + \mathrm{d}\mathrm{T}_x^2 \\ & - \partial_x(\beta \mathrm{N}_y + \beta' \mathrm{N}_z + \beta'' \mathrm{T}_x). \end{aligned}$$

Dès lors, si l'on effectue l'intégrale

$$\int\!\!\int_\sigma [\mathrm{N}_y \partial_y + \mathrm{N}_z \partial_z + \mathrm{T}_x g_x]\, d\sigma,$$

on constate aisément que le terme

$$-\int\!\!\int_\sigma \partial_x(\beta \mathrm{N}_y + \beta' \mathrm{N}_z + \beta'' \mathrm{T}_x)\, d\sigma$$

est *nul identiquement*.

En effet, d'une part, les coefficients β, β', β'' étant *constants* peuvent sortir du signe somme; d'autre part, les trois intégrales $\int\!\!\int_\sigma \partial_x(\mathrm{N}_y, \mathrm{N}_z, \mathrm{T}_x)\, d\sigma$ sont *nulles*, vu les formules (9) et (14).

Nous aurons donc, comme expression du premier membre de l'équation (15), une intégrale double dans laquelle l'élément différentiel sera la somme de trois carrés dont les coefficients respectifs b, c, d sont positifs. Cette intégrale, devant être nulle, ne pourra l'être que si chaque carré, pris isolément, s'annule : ce qui entraîne

$$\mathrm{T}_x = 0, \qquad \mathrm{N}_z = 0, \qquad \mathrm{N}_y = 0.$$

Le résultat fondamental que nous venons d'établir en suivant l'élégante méthode de M. Boussinesq, *mais spécifiée et simplifiée pour le cas où existe le potentiel* $\rho\Phi$, s'interprète de la manière suivante :

Dans tout tronçon supposé homogène dans le sens de la longueur et soustrait à toute action extérieure s'exerçant sur sa masse et sa surface latérale, les *composantes de la pression mutuelle de deux fibres quelconques suivant les y et les z sont nulles.*

IV. — Expression de l'effort d'extension, des couples de flexion et de torsion, des efforts tranchants.

1. Les tensions N_y, N_z, T_x étant nulles, les formules (6) se simplifient. La première devient

$$(16) \qquad \partial_x = AN_x \qquad \text{ou} \qquad N_x = \frac{1}{A}\partial_x = E\left(\partial_0 - y\frac{d^2\eta_0}{dx^2} - z\frac{d^2\zeta_0}{dx^2}\right),$$

E désignant le coefficient d'élasticité d'une fibre longitudinale quelconque du tronçon ; les trois suivantes s'écrivent de même :

$$(17) \quad (\partial_y, \partial_z, g_x) = -\partial_x(\beta, \beta', \beta'') \quad \text{ou} \quad -\left(\partial_0 - y\frac{d^2\eta_0}{dx^2} - z\frac{d^2\zeta_0}{dx^2}\right)(\beta, \beta', \beta'').$$

Parmi les trois quantités ∂_0, $\frac{d^2\eta_0}{dx^2}$, $\frac{d^2\zeta_0}{dx^2}$, qui figurent dans les équations (16) et (17), ∂_0 a une signification physique connue; quant aux dérivées secondes $\frac{d^2\eta_0}{dx^2}$, $\frac{d^2\zeta_0}{dx^2}$, elles ne sont autres que les *courbures* que présente à l'origine, en projection sur deux plans rectangulaires des xy et des xz, une ligne matérielle primitivement droite et tangente à la fibre moyenne.

Si maintenant on intègre le système d'équations (17) par rapport à y et à z, il est facile de voir que la base σ du tronçon subit, par rapport à l'axe local des x toujours supposé coïncidant avec l'élément ds de l'axe de la tige, et outre ses déformations transversales ∂_y, ∂_z, g_x, éprouvées dans son propre plan, pareilles pour toutes les sections σ du tronçon (à une première approximation), une rotation d'ensemble autour de cet axe Ox. La connaissance de cette rotation, jointe à celle de ∂_y, ∂_z, g_x, permettra donc de déterminer complètement, *du moins en projection sur le plan des yz*, le mode de déformation et de déplacement de la section transversale σ considérée.

2. Cela posé, cherchons à sommer les composantes normales N_x qui s'exercent aux divers points d'une section σ.

Il vient

$$\iint_\sigma N_x\,d\sigma = \iint_\sigma E\left(\vartheta_0 - y\frac{d^2\eta_0}{dx^2} - z\frac{d^2\zeta_0}{dx^2}\right)d\sigma;$$

ou encore, ϑ_0, $\frac{d^2\eta_0}{dx^2}$, $\frac{d^2\zeta_0}{dx^2}$ étant *constants* dans l'étendue d'une section,

$$\iint_\sigma N_x\,d\sigma = \vartheta_0\iint_\sigma E\,d\sigma - \frac{d^2\eta_0}{dx^2}\iint_\sigma Ey\,d\sigma - \frac{d^2\zeta_0}{dx^2}\iint_\sigma Ez\,d\sigma.$$

Or, l'origine des axes coïncidant primitivement avec le centre de gravité de la section défini, comme l'on sait, en attribuant à chaque élément de celle-ci une masse fictive proportionnelle au coefficient d'élasticité E de la fibre longitudinale qui y passe, les deux derniers termes de l'expression précédente disparaissent, et il reste

$$\iint_\sigma N_x\,d\sigma = \vartheta_0\iint_\sigma E\,d\sigma = E'\sigma\vartheta_0,$$

en appelant E' le coefficient *moyen* d'élasticité des fibres longitudinales.

En définitive, nous voyons que la réduction des forces N_x donne :

1° Une *résultante* $\mathfrak{N} = E'\sigma\vartheta_0$ appliquée au centre de gravité;

2° Un *couple normal à la section* σ et qui équivaut à l'ensemble des forces

$$-E\left(y\frac{d^2\eta_0}{dx^2} + z\frac{d^2\zeta_0}{dx^2}\right)d\sigma.$$

Ce couple se décompose en deux autres, perpendiculaires aux axes Oy et Oz, dont les moments respectifs M_y et M_z, comptés positivement de Ox vers Oz pour le premier, de Ox vers Oy pour le second, sont

$$M_y = \iint_\sigma E\left(y\frac{d^2\eta_0}{dx^2} + z\frac{d^2\zeta_0}{dx^2}\right)z\,d\sigma, \qquad M_z = \iint_\sigma E\left(y\frac{d^2\eta_0}{dx^2} + z\frac{d^2\zeta_0}{dx^2}\right)y\,d\sigma.$$

Or, les axes Oy et Oz coïncidant primitivement avec les axes principaux d'inertie de la section, on a

$$\iint_\sigma Eyz\,d\sigma = 0.$$

Par suite, les expressions de M_y et de M_z se simplifient et deviennent, en introduisant les *moments d'inertie principaux*

$$E' I_y = \int\int_\sigma E z^2 \, d\sigma, \qquad E' I_z = \int\int_\sigma E y^2 \, d\sigma :$$

$$(18) \qquad M_y = E' I_y \frac{d^2 \zeta_0}{dx^2}, \qquad M_z = E' I_z \frac{d^2 \eta_0}{dx^2}.$$

La force $\mathfrak{N} = E'\sigma\partial_0$ qui produit la *dilatation* ∂_0 de la fibre moyenne représente l'*effort d'extension* au point considéré de l'axe de la tige; les couples M_y, M_z qui donnent lieu respectivement aux *courbures* $\frac{d^2\zeta_0}{dx^2}$, $\frac{d^2\eta_0}{dx^2}$, sont appelés *couples de flexion*.

5. Passons à la composition des forces T_y et T_z appliquées en chacun des points de la section σ. L'ensemble de ces forces pourra se ramener généralement à un *couple* situé dans le plan des yz et qui, ayant pour effet de faire tourner la section dans son plan, sera le *couple de torsion*, et à une *résultante* dont les composantes suivant les y et les z, $\mathfrak{F}_y$ et $\mathfrak{F}_z$, seront désignées sous le nom d'*efforts tranchants*.

1° *A une première approximation, les efforts tranchants $\mathfrak{F}_y$ et $\mathfrak{F}_z$ sont nuls.* — En effet, dans cette hypothèse, on a

$$\frac{d}{dx}(\partial, g) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{d}{dx}(N, T) = 0;$$

donc la première équation du système (1) devient

$$\frac{dT_z}{dy} + \frac{dT_y}{dz} = 0.$$

Multiplions l'équation précédente par $U d\sigma$, U étant une fonction continue quelconque de y, z; et intégrons les résultats dans toute l'étendue de la section σ, en remplaçant toutefois

$$U\left(\frac{dT_z}{dy} + \frac{dT_y}{dz}\right)$$

par

$$\frac{d}{dy}(UT_z) + \frac{d}{dz}(UT_y) - T_z\frac{dU}{dy} - T_y\frac{dU}{dz}.$$

Le procédé qui nous a servi à établir la formule (13) s'applique ici de même et donne, vu la première équation du système (2),

$$\int\int_\sigma \left(T_z \frac{dU}{dy} + T_y \frac{dU}{dz}\right) d\sigma = 0.$$

D'où il vient, pour $U = y$,

$$\int\int_\sigma T_z \, d\sigma = 0;$$

pour $U = z$,

$$\int\int_\sigma T_y \, d\sigma = 0.$$

Il en résulte que les efforts tranchants $\mathcal{F}_y$, $\mathcal{F}_z$, étant définis par les égalités

$$\mathcal{F}_y = \int\int_\sigma T_z \, d\sigma, \qquad \mathcal{F}_z = \int\int_\sigma T_y \, d\sigma,$$

sont nuls; et la proposition est établie.

2° Par suite de la nullité des efforts tranchants, il ne subsiste, comme résultat de la réduction des forces T_y, T_z, qu'un *couple* dont le moment M_x sera

$$M_x = \int\int_\sigma (y T_y - z T_z) \, d\sigma.$$

Démontrons que M_x est *proportionnel à l'angle de torsion φ et au carré de l'aire σ de la section transversale.*

En effet, deux sections primitivement normales et situées à une distance dx auront, dans la déformation, tourné, en projection, l'une par rapport à l'autre, d'un petit angle $d\psi$ ou $\varphi \, dx$, φ désignant l'angle de torsion rapporté à l'unité de longueur. Les déplacements transversaux correspondant à cette rotation élémentaire, les seuls qui soient différents (à une première approximation) dans les deux sections σ consécutives, seront

(19) $$d\eta = z \, d\psi = -z \varphi \, dx, \qquad d\zeta = y \, d\psi = y \varphi \, dx.$$

Donc les glissements g_y, g_z, définis par les équations (4), seront, en fonction de ξ et de φ,

(20) $$g_y = \frac{d\xi}{dz} + \varphi y, \qquad g_z = \frac{d\xi}{dy} - \varphi z.$$

Supposons que l'angle φ soit donné; il suffira, pour connaître g_y, g_z

et par suite T_y, T_z, de déterminer la fonction ξ en chaque point (y, z) de la section σ.

A cet effet, on porte les expressions de T_y, T_z en fonction de g_y, g_z, tirées de (6), dans les équations

$$(21) \qquad \frac{dT_z}{dy} + \frac{dT_y}{dz} = 0, \qquad T_z \cos\alpha + T_y \sin\alpha = 0;$$

on substitue ensuite aux déformations g_y, g_z leurs valeurs (20), et, de la sorte, on obtient le système permettant de déterminer ξ.

Cela posé, divisons par φ les équations (21). Celles-ci ne renfermeront d'autre inconnue que le rapport $\frac{\xi}{\varphi}$; il s'ensuit que les valeurs de ξ, celles de g_y, g_z, T_y, T_z aux divers points, ainsi que le moment $M_x = \int\int_\sigma (yT_y - zT_z)\,d\sigma$ du couple résultant, sont simplement *proportionnelles à* φ.

De même, établissons la proportionnalité de M_x au carré de σ : il suffit, pour cela, de constater que les équations (20) et (21) ne cessent pas d'être satisfaites quand on y multiplie y, z, dy, dz par un rapport *constant* de similitude a, pourvu qu'on multiplie en même temps ξ par a^2, g_y, g_z, T_y, T_z par a, et, en conséquence, le moment

$$M_x = \int\int_0 (yT_y - zT_z)\,d\sigma.$$

par la quantité a^4 *proportionnelle à* σ^2.

Ainsi donc, s'il s'agit de tronçons ayant des sections semblables et pareillement constitués en leurs points homologues, le moment de torsion M_x varie proportionnellement à φ et à σ^2; par suite, si l'on désigne par c un coefficient dépendant des élasticités transversales et de la forme de la section, le moment de torsion M_x pourra s'écrire, d'une manière générale,

$$M_x = c\sigma^2\varphi \qquad \text{ou} \qquad c\sigma^2\frac{d\psi}{dx}.$$

V. — Équations de l'équilibre et du mouvement d'un tronçon de tige dans le cas réel.

1. La théorie qui vient d'être exposée et les résultats obtenus ne conviennent *en toute rigueur* qu'au cas *idéal* où l'on supposerait la tige infinie, de manière à éliminer les influences perturbatrices des extrémités; le tronçon exactement prismatique à l'état naturel correspondant à la température θ, de constitution parfaitement homogène dans le sens de la longueur; la masse du tronçon et sa surface latérale libres de toute action extérieure.

Evidemment toutes ces conditions ne peuvent être vérifiées dans un tronçon de tige *réel;* toutefois, si la longueur de la tige est suffisamment grande, par rapport aux dimensions transversales, pour que les conditions précédentes soient approximativement réalisées, *en vertu du principe de continuité*, les résultats obtenus dans le cas *théorique* déjà envisagé pourront, dans une certaine mesure, *être étendus* au cas *réel.*

Ainsi les expressions des forces ou couples $\mathfrak{N}$, M_x, M_y, M_z ne différeront pas notablement de ce qu'elles étaient dans ce cas *limite*, et les efforts tranchants $\mathcal{F}_y$, $\mathcal{F}_z$, qui s'annulaient dans ce cas limite, n'auront jamais, rapportés à l'unité de surface de la section σ, que des valeurs relativement faibles, comparées à celles de $\mathfrak{N}$ ou à celles de M_x, M_y, M_z divisées par $\sigma^{\frac{3}{2}}$. De même, la dilatation ∂_x des fibres longitudinales sera restée sensiblement une fonction linéaire des coordonnées y, z.

Donc, partant de l'extension des résultats acquis, cherchons à exprimer les équations d'équilibre d'un tronçon de tige *réel;* de plus, pour simplifier, bornons-nous au cas intéressant d'une tige *primitivement droite et non torse, peu déformée.*

2. Soit un tronçon quelconque de la tige. Les axes locaux de coordonnées, rapportés à l'*état primitif*, c'est-à-dire à l'*état naturel correspondant à la température* θ, sont : Ox, l'élément de fibre moyenne; Oy et Oz, les axes principaux d'inertie de la section σ.

La première base σ du tronçon supporte les trois forces $-\mathfrak{N}$, $-\mathcal{F}_y$, $-\mathcal{F}_z$, et les trois couples $-M_x$, $-M_y$, $-M_z$; la seconde σ' est soumise à trois forces et trois couples analogues, mais changés de signe, augmentés de leurs différentielles par rapport à x et orientés suivant les axes locaux $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ du tronçon voisin.

Ces axes diffèrent seulement des précédents Ox, Oy, Oz, en direction, de quantités infiniment petites que nous allons déterminer. En effet, dans la déformation, la fibre centrale primitivement droite s'est incurvée et les courbures, à l'origine, de ses projections sur le plan des xy et celui des xz sont respectivement $\frac{1}{R_y} = \frac{d^2\eta_0}{dx^2}$, $\frac{1}{R_z} = \frac{d^2\zeta_0}{dx^2}$; de plus, la seconde base σ' a tourné par rapport à la première σ, de telle sorte que les axes principaux d'inertie des deux sections σ et σ', qui étaient *primitivement parallèles* (puisque la tige est supposée *non torse*), font maintenant, en projection sur le plan des yz, un angle $d\psi = \varphi\, dx$. Il est facile dès lors de déduire les cosinus des angles que font avec Ox, Oy, Oz les axes $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$; ceux-ci seront sensiblement : pour $O'x'$, 1, $\frac{dx}{R_y}$, $\frac{dx}{R_z}$; pour $O'y'$, $-\frac{dx}{R_y}$, 1, $\varphi\, dx$; pour $O'z'$, $-\frac{dx}{R_z}$, $-\varphi\, dx$, 1.

D'autre part, si les flexions et torsion sont *très petites*, nous pourrons négliger leurs produits par (M_x, M_y, M_z), ce qui revient, étant donné que ces moments ont dans leurs expressions respectives les facteurs φ, $\frac{1}{R_y}$, $\frac{1}{R_z}$, à négliger les carrés et produits des facteurs considérés. Nous négligerons aussi leurs produits par $\mathcal{F}_y$, $\mathcal{F}_z$; car les efforts tranchants étant toujours très faibles, nous n'introduirions, en les multipliant par φ, $\frac{1}{R_y}$, $\frac{1}{R_z}$, que des termes du second ordre de petitesse, donc négligeables.

5. Ces conventions faites, nous pouvons, en utilisant les valeurs des cosinus qui viennent d'être calculés, chercher les *composantes et les moments* suivant Ox, Oy, Oz des forces $\mathcal{N} + \frac{d\mathcal{N}}{dx}dx$, $\mathcal{F}_y + \frac{d\mathcal{F}_y}{dx}dx$, $\mathcal{F}_z + \frac{d\mathcal{F}_z}{dx}dx$ appliquées à la seconde extrémité de l'élément dx, ainsi que les *moments des couples* $M_x + \frac{dM_x}{dx}dx$, $M_y + \frac{dM_y}{dx}dx$, $M_z + \frac{dM_z}{dx}dx$.

1° *Composantes des forces* $\mathcal{N} + \frac{d\mathcal{N}}{dx}dx$, $\mathcal{F}_y + \frac{d\mathcal{F}_y}{dx}dx$, $\mathcal{F}_z + \frac{d\mathcal{F}_z}{dx}dx$. — Elles sont pour la première, $\mathcal{N} + \frac{d\mathcal{N}}{dx}dx$, $\frac{\mathcal{N}}{R_y}dx$, $\frac{\mathcal{N}}{R_z}dx$; pour la seconde, 0, $\mathcal{F}_y + \frac{d\mathcal{F}_y}{dx}dx$, 0; pour la troisième, 0, 0, $\mathcal{F}_z + \frac{d\mathcal{F}_z}{dx}dx$.

2° *Moments des forces* $\mathcal{N} + \frac{d\mathcal{N}}{dx}dx$, $\mathcal{F}_y + \frac{d\mathcal{F}_y}{dx}dx$, $\mathcal{F}_z + \frac{d\mathcal{F}_z}{dx}dx$. — Ces forces sont appliquées en un point O', dont les coordonnées sont

dx, $dx\frac{dx}{R_y}$, $dx\frac{dx}{R_z}$. Par l'application des formules classiques de Mécanique rationnelle, on évaluera les moments L, M, N, par rapport aux axes Ox, Oy, Oz. On trouve ainsi que, en se bornant à une première approximation, les moments de $\mathfrak{N} + \frac{d\mathfrak{N}}{dx}dx$ sont négligeables; ce qui était à prévoir, puisque cette force prolongée ne passe qu'à une distance, comparable à dx^2, de l'origine O; de même, pour les deux forces $\mathfrak{F}_y + \frac{d\mathfrak{F}_y}{dx}dx$, $\mathfrak{F}_z + \frac{d\mathfrak{F}_z}{dx}dx$, les seuls moments sensibles sont, pour la première, $N = \mathfrak{F}_y\,dx$; pour la seconde, $M = -\mathfrak{F}_z\,dx$.

3° *Moments des couples* $M_x + \frac{dM_x}{dx}dx$, $M_y + \frac{dM_y}{dx}dx$, $M_z + \frac{dM_z}{dx}dx$. — Ces couples sont normaux à trois directions $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ qui ne diffèrent respectivement de celles des axes Ox, Oy, Oz que par des angles comparables à $\frac{dx}{R_y}$, $\frac{dx}{R_z}$, $\varphi\,dx$. Par conséquent, leurs moments seront : pour le premier, $M_x + \frac{dM_x}{dx}dx$, o, o; pour le second o, $M_y + \frac{dM_y}{dx}dx$, o; pour le troisième, o, o, $M_z + \frac{dM_z}{dx}dx$.

4. Reste à évaluer les *composantes et les moments des forces extérieures*. Soient X, Y, Z, les composantes de la résultante des forces extérieures par unité de masse; en désignant par ρ la densité moyenne du tronçon, les *composantes* des forces extérieures ont pour expressions $\rho X\sigma\,dx$, $\rho Y\sigma\,dx$, $\rho Z\sigma\,dx$.

Quant aux *moments* des forces extérieures, on peut négliger, d'une part, ceux de $\rho Y\sigma\,dx$, $\rho Z\sigma\,dx$, par rapport à Oy et Oz, le bras de levier de ces forces étant de l'ordre de dx; d'autre part, ceux de $\rho X\sigma\,dx$ par rapport aux trois axes, à condition toutefois que les actions extérieures ne soient pas distribuées trop inégalement de part et d'autre du centre de gravité des sections. Il ne subsiste donc plus que le moment des composantes transversales $\rho Y\sigma\,dx$ et $\rho Z\sigma\,dx$ par rapport à Ox; nous le désignerons par $\mu\rho\sigma^{\frac{3}{2}}dx$, de telle sorte que $\mu\sigma^{\frac{1}{2}}$ représentera le moment des forces transversales rapporté à l'unité de masse.

5. Par suite, les équations fournies par le principe des quantités

de mouvement seront :

$$- \mathfrak{N} + \left(\mathfrak{N} + \frac{d\mathfrak{N}}{dx} dx \right) + \rho X \sigma \, dx = 0,$$

$$- \mathfrak{F}_y + \left(\mathfrak{F}_y + \frac{d\mathfrak{F}_y}{dx} dx \right) + \rho Y \sigma \, dx + \frac{\mathfrak{N}}{R_y} dx = 0,$$

$$- \mathfrak{F}_z + \left(\mathfrak{F}_z + \frac{d\mathfrak{F}_z}{dx} dx \right) + \rho Z \sigma \, dx + \frac{\mathfrak{N}}{R_z} dx = 0,$$

et l'on aura, pour celles des moments,

$$- M_x + \left(M_x + \frac{dM_x}{dx} dx \right) + \mu \rho \sigma^{\frac{3}{2}} dx = 0,$$

$$- M_y + \left(M_y + \frac{dM_y}{dx} dx \right) + \mathfrak{F}_z \, dx \quad = 0,$$

$$- M_z + \left(M_z + \frac{dM_z}{dx} dx \right) + \mathfrak{F}_y \, dx \quad = 0.$$

La première et la quatrième de ces équations reviennent à

$$(22) \qquad \frac{d\mathfrak{N}}{dx} + \rho X \sigma = 0, \qquad \frac{dM_x}{dx} + \mu \rho \sigma^{\frac{3}{2}} = 0.$$

Les quatre autres peuvent s'écrire

$$(23) \qquad \begin{cases} \dfrac{dM_y}{dx} + \mathfrak{F}_z = 0, & \dfrac{dM_z}{dx} + \mathfrak{F}_y = 0, \\[2ex] \dfrac{d\mathfrak{F}_y}{dx} + \dfrac{\mathfrak{N}}{R_y} + \rho Y \sigma = 0, & \dfrac{d\mathfrak{F}_z}{dx} + \dfrac{\mathfrak{N}}{R_z} + \rho Z \sigma = 0. \end{cases}$$

En substituant les valeurs de $\mathfrak{F}_y$ et de $\mathfrak{F}_z$ dans les deux dernières équations du système (23), il vient pour celles-ci :

$$(24) \qquad \frac{d^2 M_z}{dx^2} - \frac{\mathfrak{N}}{R_y} - \rho Y \sigma = 0, \qquad \frac{d^2 M_y}{dx^2} - \frac{\mathfrak{N}}{R_z} - \rho Z \sigma = 0.$$

Les deux premières équations du système (23) nous apprennent que les *efforts tranchants* $\mathfrak{F}_y$, $\mathfrak{F}_z$ égalent les dérivées premières en x, changées de signe, des moments fléchissants respectifs M_z, M_y; les égalités (22) régissent, l'une l'*extension* ou la *compression*, l'autre la *torsion*, tandis que les relations (24) régissent la *flexion*.

Il ne reste plus, pour résoudre les équations (22) et (24), qu'à y remplacer $\mathfrak{N}$, $\frac{1}{R_y}$, $\frac{1}{R_z}$, M_x, M_y, M_z par leurs valeurs. Ces valeurs, pour une tige *primitivement droite, non torse, peu déformée*, sont :

$$\mathfrak{N} = E'\sigma\partial_0 \quad \text{ou} \quad E'\sigma\frac{d\xi_0}{dx}, \qquad \frac{1}{R_y} = \frac{d^2\eta_0}{dx^2}, \qquad \frac{1}{R_z} = \frac{d^2\zeta_0}{dx^2},$$

$$M_x = c\sigma^2\varphi \quad \text{ou} \quad c\sigma^2\frac{d\psi}{dx}, \qquad M_y = E'I_y\frac{d^2\zeta_0}{dx^2}, \qquad M_z = E'I_z\frac{d^2\eta_0}{dx^2}.$$

Remarquons, pour finir, que, si l'on introduit dans les relations (22) et (24) les composantes et les moments de la *force d'inertie*, on en déduira les équations des vibrations *longitudinales*, *tournantes* et *transversales* de la tige.

VI. — Introduction de la température θ dans les équations.

1. Dans toutes les formules qui ont été établies jusqu'ici, nous avons fait une hypothèse *essentielle :* nous avons supposé que l'*état primitif* du tronçon, choisi comme terme de comparaison, était l'*état naturel relatif à la température* θ. Or le choix de cet état primitif ne peut être que *provisoire;* car la température θ, que nous savons être uniforme pour un tronçon quelconque de la tige, varie d'un instant à l'autre, et, de plus, au même instant, diffère suivant le tronçon considéré; il faut donc, si l'on veut se rendre compte du rôle joué par la température dans les équations qui précèdent, que les déplacements et les déformations soient rapportés à un point de repère fixe : ce point de repère *invariable* sera l'*état naturel correspondant à la température spéciale* $\theta = 0$.

2. Examinons donc comment nos formules devront être modifiées. Désignons par ∂'_x, ∂'_y, ∂'_z, g'_x, g'_y, g'_z les déformations comptées cette fois *à partir de l'état naturel relatif à la température* $\theta = 0$; ces déformations sont liées aux déplacements ξ', η', ζ' comptés aussi *à partir du même état primitif* $\theta = 0$, par les relations connues (4). Si l'on joint la connaissance de la température θ à celle des déformations (∂', g') ainsi choisies, on pourra définir, à toute époque, l'état physique d'un tronçon quelconque. Généralisant la loi de Hooke pour l'étendre aux variations modérées de θ, M. Boussinesq écrit que les six composantes de la pression intérieure N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z sont des fonctions linéaires et homogènes des sept paramètres ∂'_x, ∂'_y, ∂'_z, g'_x, g'_y, g'_z et θ, ce qui le conduit à introduire six nouveaux coefficients d'élasticité ν_x, ν_y, ν_z, τ_x, τ_y, τ_z, du moins dans le cas des milieux de la contexture la plus générale.

Les composantes N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z de la pression intérieure dérivent encore d'un potentiel d'élasticité $\rho\Phi$, de sorte qu'on a

$$(25) \qquad N_x = \frac{d(\rho\Phi)}{d\partial_x}, \qquad N_y = \frac{d(\rho\Phi)}{d\partial_y}, \qquad \ldots, \qquad T_z = \frac{d(\rho\Phi)}{dg_z},$$

et le potentiel $\rho\Phi$ est lié au potentiel analogue $\rho\Phi'$ relatif à la température spéciale $\theta = 0$, par la relation

$$\rho\Phi = \rho\Phi' - \theta(\nu_x\partial'_x + \nu_y\partial'_y + \nu_z\partial'_z + \tau_x g'_x + \tau_y g'_y + \tau_z g'_z).$$

3. Pour le problème qui nous occupe, étant donnée la symétrie de contexture de la tige relativement au plan des yz, il n'y aura que quatre coefficients d'élasticité thermiques ν_x, ν_y, ν_z, τ_x, introduits dans l'expression du potentiel $\rho\Phi$, qui pourra par suite s'écrire $\rho\Phi = \rho\Phi' - \theta(\nu_x\partial'_x + \nu_y\partial'_y + \nu_z\partial'_z + \tau_x g'_x)$, le terme $\rho\Phi'$ étant, vu la symétrie de contexture, la somme de deux formes quadratiques distinctes, l'une en ∂'_x, ∂'_y, ∂'_z, g'_x, l'autre en g'_y, g'_z. Il suit de là que les expressions $N_x + \nu_x\theta$, $N_y + \nu_y\theta$, $N_z + \nu_z\theta$, $T_x + \tau_x\theta$, T_y, T_z, sont les mêmes fonctions linéaires de ∂'_x, ∂'_y, ∂'_z, g'_x, g'_y, g'_z qu'à la température $\theta = 0$.

Cela posé, résolvant par rapport aux ∂', g', les six relations ainsi écrites, on trouve comme expressions des déformations ∂', g', les formules suivantes où sont groupés à part, puis réduits ensemble, les termes dans lesquels figure θ, et où les coefficients des N, T, sont évidemment les mêmes que dans les formules (6) données plus haut :

$$(26) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \partial'_x = A(N_x - \beta N_y - \beta' N_z - \beta'' T_x) \qquad + D_x\theta, \\ \partial'_y = -\beta A N_x + (3 \text{ termes en } N_y, N_z, T_x) + D_y\theta, \\ \partial'_z = -\beta' A N_x + (3 \text{ termes en } N_y, N_z, T_x) + D_z\theta, \\ g'_x = -\beta'' A N_x + (3 \text{ termes en } N_y, N_z, T_x) + G_x\theta, \\ g'_y = G T_y + H T_z, \\ g'_z = H T_y + G' T_z. \end{array} \right.$$

Remarquons de suite que les nouveaux coefficients D_x, D_y, D_z, G_x, qui sont des fonctions déterminées des quatre coefficients d'élasticité thermiques ν_x, ν_y, ν_z, τ_x et aussi des coefficients entrant dans $\rho\Phi'$, présentent l'avantage d'avoir une *signification physique immédiate*. En effet, supposons que, le tronçon restant toujours à l'état naturel ou sans tension, nous élevions sa température de o à θ; tous les N, T sont nuls, et les formules précédentes se réduisent pour donner :

$$(27)\qquad \partial'_x = D_x\theta,\quad \partial'_y = D_y\theta,\quad \partial'_z = D_z\theta,\quad g'_x = G_x\theta,\quad g'_y = 0,\quad g'_z = 0.$$

Les déformations, *purement thermiques*, sont donc proportionnelles à la température θ, et par conséquent les D_x, D_y, D_z sont les *coefficients de dilatation thermique* suivant les directions Ox, Oy, Oz; de même, G_x désigne le coefficient du glissement thermique conjugué aux x; quant aux deux autres coefficients analogues G_y, G_z, ils sont nuls en raison de la symétrie de contexture de la tige.

Dès lors, si l'on retranche des déformations *totales* ∂'_x, ..., g'_z, leurs parties *purement thermiques* $D_x\theta$, ..., ou dues à l'échauffement θ, le reste, c'est-à-dire les termes en N_x, N_y, ..., T_z des formules (26), seront évidemment les déformations *purement mécaniques* ∂_x, ∂_y, ..., g_z dues aux pressions N, T, et résultant de l'application de celles-ci au tronçon considéré, censé porté déjà à la température θ, comme on l'a admis au Chapitre précédent. On aura donc :

$$(28)\quad \begin{cases} \partial'_x = \partial_x + D_x\theta,\quad \partial'_y = \partial_y + D_y\theta,\quad \partial'_z = \partial_z + D_z\theta,\quad g'_x = g_x + G_x\theta, \\ g'_y = g_y,\quad g'_z = g_z. \end{cases}$$

La seule considération des deux dernières équations (28) nous apprend que la température *n'influe pas* sur les glissements conjugués aux directions transversales et par suite sur les tensions T_y, T_z, considérées du moins dans leurs parties *principales* constituant le couple de torsion ou ne donnant pas d'effort tranchant.

4. A une première approximation, les coefficients thermiques D_x, D_y, D_z, G_x, sont, comme d'ailleurs les coefficients dont ils dépendent, indépendants de x et de θ. Ils varieront généralement dans les sens transversaux, sans être pour cela des fonctions *arbitraires* de y, z, du moins, dans l'hypothèse, faite implicitement au Chapitre précédent, *de l'existence d'un état naturel pour l'ensemble du tronçon, à toutes les températures* θ.

En effet, au début de son Mémoire sur les tiges (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1871), M. Boussinesq établit, à la suite de Barré de Saint-Venant, les conditions nécessaires et suffisantes pour que six fonctions données de x, y, z puissent représenter les trois dilatations ∂ et les trois glissements g, amenés par de petits déplacements ξ, η, ζ continus quelconques, dans une masse d'étendue finie ou notable en tous sens, comme sont nos tronçons. Ces conditions sont les suivantes :

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d^2\partial_x}{dy\,dz} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{dg_y}{dy}+\frac{dg_z}{dz}-\frac{dg_x}{dx}\right),\\
\frac{d^2\partial_y}{dz\,dx} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dy}\left(\frac{dg_z}{dz}+\frac{dg_x}{dx}-\frac{dg_y}{dy}\right),\\
\frac{d^2\partial_z}{dx\,dy} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dz}\left(\frac{dg_x}{dx}+\frac{dg_y}{dy}-\frac{dg_z}{dz}\right),\\
\frac{d^2g_x}{dy\,dz} &= \frac{d^2\partial_y}{dz^2}+\frac{d^2\partial_z}{dy^2},\\
\frac{d^2g_y}{dz\,dx} &= \frac{d^2\partial_z}{dx^2}+\frac{d^2\partial_x}{dz^2},\\
\frac{d^2g_z}{dx\,dy} &= \frac{d^2\partial_x}{dy^2}+\frac{d^2\partial_y}{dx^2}.
\end{aligned}\right.$$

Les relations (29) sont tout à fait générales et s'appliquent aussi bien aux déformations purement thermiques qu'à celles qui sont purement mécaniques, pourvu cependant que les déplacements ξ, η, ζ soient *très petits*.

Substituons donc dans le système (29) les valeurs des déformations purement thermiques définies par les formules (27); en tenant compte de ce que, à une première approximation, dans toute l'étendue du tronçon, la *température* θ est *uniforme* et les *dérivées en* x des déformations *nulles*, nous obtiendrons aisément, par cette substitution, les conditions de compatibilité auxquelles doivent satisfaire les coefficients D_x, D_y, D_z, G_x, pour que des dilatations *purement thermiques* à toute température θ soient possibles, ou que l'échauffement θ puisse se produire sans être accompagné de pressions (ce qui est le caractère distinctif de l'état dit *naturel*), à savoir :

$$\frac{d^2 D_x}{dy\,dz} = 0, \qquad \frac{d^2 D_x}{dy^2} = 0, \qquad \frac{d^2 D_x}{dz^2} = 0, \qquad \frac{d^2 D_y}{dz^2} + \frac{d^2 D_z}{dy^2} - \frac{d^2 G_x}{dy\,dz} = 0.$$

Les D_y, D_z, G_x, n'ayant qu'une seule relation à vérifier, pourront donc être choisis d'une manière assez large; *quant à* D_x, il résulte des trois premières relations qui précèdent que ce coefficient sera une *fonction linéaire des coordonnées transversales*, c'est-à-dire que sa forme la plus générale sera

$$(30) \qquad D_x = D_0 - \mathcal{A} y - \mathcal{B} z,$$

D_0 désignant le coefficient de dilatation thermique de la fibre centrale, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux coefficients qui varieront généralement d'un tronçon à l'autre, mais qui ne dépendent ni de y, ni de z.

Il est clair que, pour toute autre expression de D_x, il n'existera pas, pour l'ensemble du tronçon, d'*état naturel* à la température θ, mais seulement pour chaque particule imperceptible du tronçon, censée détachée du reste et soustraite à toute pression. Les dilatations thermiques des particules, ainsi libérées individuellement, rendront leurs formes impropres à se juxtaposer exactement ou à reconstituer le tronçon *continu* en se soudant.

5. Les déplacements et les déformations étant ainsi rapportés à l'*état naturel relatif à la température spéciale* $\theta = 0$, cherchons ce que deviennent les formules qui donnent l'effort d'extension $\mathcal{N}$, les moments de flexion M_y, M_z, le couple de torsion M_x et les efforts tranchants $\mathcal{T}_y$, $\mathcal{T}_z$.

1° *Effort d'extension.* — On sait que l'expression de cet effort est $\mathcal{N} = E'\sigma\partial_0$; or, vu les formules (28), on a $\partial_0 = \partial'_0 - D_0\theta$; d'où il vient pour $\mathcal{N}$

$$(31) \qquad \mathcal{N} = E'\sigma(\partial'_0 - D_0\theta).$$

Cette dernière relation nous apprend que l'échauffement a pour effet de *diminuer* la traction $\mathcal{N}$ proportionnellement à l'écart de température θ : en effet, les corps solides se dilatant sous l'action de la chaleur, le coefficient D_0 est *positif*.

2° *Moments de flexion.* — Les moments fléchissants M_y et M_z sont donnés par les égalités (18). Or celles-ci supposent la *linéarité* en y et z de la déformation ∂_x. D'autre part, pour établir la linéarité de ∂_x, nous nous sommes basés sur la remarque suivante, dont il est facile d'ailleurs de reconnaître la légitimité, à savoir que, pour une tige très longue par rapport aux dimensions transversales, les dilatations et glissements (∂, g) varient d'une manière incomparablement moins rapide dans le sens longitudinal x que dans les sens transversaux y, z. Il est clair que ce principe de la *graduelle* variation des déformations suivant l'axe de la tige, qui s'applique tant aux déformations purement thermiques qu'à celles qui sont purement mécaniques, reste vrai pour les déformations *totales* résultant de la superposition des deux précédentes, c'est-à-dire pour les déformations (∂', g') comptées à partir de l'*état naturel relatif à la température spéciale* $\theta = 0$.

Il suit de là que nous pouvons appliquer la formule (9) aux déformations *totales* (∂', g') ainsi qu'aux déplacements correspondants (ξ', η', ζ') et écrire

$$\partial'_x = \partial'_0 - y\frac{d^2\eta'_0}{dx^2} - z\frac{d^2\zeta'_0}{dx^2};$$

or l'on sait que $\partial'_x = \partial_x + D_x\theta$ et que $D_x = D_0 - \mathcal{A}y - \mathcal{B}z$; d'où il vient

$$\partial_x = (\partial'_0 - D_0\theta) - y\left(\frac{d^2\eta'_0}{dx^2} - \mathcal{A}\theta\right) - z\left(\frac{d^2\zeta'_0}{dx^2} - \mathcal{B}\theta\right).$$

Par identification de cette dernière égalité avec la formule (19) qui exprime également la dilatation *partielle* ∂_x, due uniquement à l'action des forces extérieures, on déduit que

$$\frac{d^2\eta_0}{dx^2} = \frac{d^2\eta'_0}{dx^2} - \mathcal{A}\theta, \qquad \frac{d^2\zeta_0}{dx^2} = \frac{d^2\zeta'_0}{dx^2} - \mathcal{B}\theta;$$

et par suite, pour expressions des *moments fléchissants* M_y et M_z,

$$(32) \qquad M_y = E'I_y\left(\frac{d^2\zeta'_0}{dx^2} - \mathcal{B}\theta\right), \qquad M_z = E'I_z\left(\frac{d^2\eta'_0}{dx^2} - \mathcal{A}\theta\right).$$

Ceux-ci *dépendront*, comme on le voit, *de la température* θ, qui, à elle seule (ou sans l'adjonction d'aucun couple M_y ou M_z de flexion), fera naître les deux courbures $\frac{1}{R_z} = \mathcal{B}\theta$, $\frac{1}{R_y} = \mathcal{A}\theta$. Il faut *excepter* cependant le cas où les coefficients $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ seraient *nuls simultanément*, ce qui aurait lieu précisément, si toutes les fibres longitudinales de la tige avaient *même* coefficient de dilatation thermique

$$D_x = D_0.$$

3° *Efforts tranchants.* — Ces efforts étaient nuls dans le *mode de déformation type;* et leurs *très petites valeurs* dans les *modes réels* sont directement liées, par le théorème des moments [formules (23)], à la dérivée en x des couples de flexion; donc ils ne dépendront de θ que dans le cas où ces couples eux-mêmes en dépendront.

4° *Couple de torsion.* — Nous avons vu au n° **5** de ce paragraphe que, dans le *mode de déformation type* dont s'écartent très peu les *modes réels*, la température n'influe pas sur les glissements conjugués aux directions transversales g_y, g_z et par suite sur les tensions T_y, T_z considérées du moins dans leurs parties *principales* constituant le couple de torsion. Il en résulte que ce dernier couple est *indépendant de* θ.

6. Il nous reste à voir maintenant dans quelle mesure la température modifiera le mouvement vibratoire des tiges.

1° *Vibrations longitudinales.* — Les déplacements d'ensemble du tronçon qui résultent de son mouvement étant, en général, très grands par rapport aux déplacements relatifs aux axes *locaux* (liés au tronçon) ou déplacements propres du tronçon, nous pourrons écrire, à une première approximation, pour chaque section σ, $\xi' = \xi'_0$, $\eta' = \eta'_0$, $\zeta' = \zeta'_0$, ces déplacements ξ'_0, η'_0, ζ'_0 de l'axe de la tige étant considérés par rapport à des axes *généraux* des x, y, z. La composante de la force d'inertie, suivant Ox, sera donc $-\rho\sigma\dfrac{d^2\xi'_0}{dt^2}$, et en l'introduisant dans la formule (22), nous obtiendrons, conformément au principe de d'Alembert, l'équation qui régit les vibrations longitudinales,

$$\frac{d\mathcal{N}}{dx} + \rho\sigma\left(X - \frac{d^2\xi'_0}{dt^2}\right) = 0.$$

Or

$$\mathcal{N} = E'\sigma(\partial'_0 - D_0\theta) = E'\sigma\left(\frac{d\xi'_0}{dx} - D_0\theta\right).$$

d'où

$$\frac{d}{dx}\left[E'\sigma\left(\frac{d\xi'_0}{dx} - D_0\theta\right)\right] + \rho\sigma\left(X - \frac{d^2\xi'_0}{dt^2}\right) = 0. \tag{33}$$

L'équation (33), dont les coefficients présentent l'avantage d'avoir une *signification physique simple et immédiate*, est analogue à celle qu'avait obtenue M. L. Roy dans sa Thèse [*Recherches sur les propriétés thermomécaniques des solides*, p. 46, équation (5)], en basant ses raisonnements sur les théories de l'Énergétique. La méthode toute intuitive que nous avons suivie nous a donc conduit au même résultat.

2° *Vibrations transversales*. — Nous obtiendrons l'équation des vibrations qui s'effectuent dans le sens des y, par exemple, en introduisant dans la première des formules (24) la composante, suivant Oy, de la force d'inertie. Cette composante a pour valeur, toujours à une première approximation, $-\rho\sigma\frac{d^2\eta'_0}{dt^2}$; de la sorte on déduit l'équation

$$-\frac{d^2 M_z}{dx^2} + \frac{\mathfrak{T}}{R_y} + \rho\sigma\left(Y - \frac{d^2\eta'_0}{dt^2}\right) = 0.$$

Mais dans le cas d'une *verge* vibrante, la tension $\mathfrak{T}$ n'est jamais considérable [1], le terme $\frac{\mathfrak{T}}{R_y}$ peut donc être négligé et il reste

$$-\frac{d^2 M_z}{dx^2} + \rho\sigma\left(Y - \frac{d^2\eta'_0}{dt^2}\right) = 0.$$

Si donc l'on a $D_x = D_0$ (ce qui correspond au cas de l'*homogénéité thermique* des fibres longitudinales), les moments fléchissants M_y, M_z ne dépendent pas de la température : et celle-ci, par suite, *n'influe pas* sur le mouvement transversal.

Au contraire, si $D_x = D_0 - \mathcal{A}y - \mathcal{B}z$, la température figure explicitement dans l'expression des couples de flexion, et, dès lors, l'équation des vibrations transversales, dans le sens des y, devient, si l'on

---

[1] Elle aurait, au contraire, le rôle principal dans le problème de la *corde* vibrante ou tige *sans rigidité* sensible.

suppose en outre $Y = 0$,

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(E' I_z \frac{d^2 \eta'_0}{dx^2}\right) + \rho\sigma \frac{d^2 \eta'_0}{dt^2} = \frac{d^2}{dx^2}(E' I_z \lambda_0 \theta). \tag{34}$$

Il est clair que l'intégrale générale de cette dernière équation comportera un terme, *fonction de* θ, qui mettra en évidence le rôle joué par la température dans le mouvement vibratoire considéré.

3° *Vibrations tournantes.* — Nous supposons, comme précédemment, qu'il n'y a pas d'autre force extérieure appliquée au tronçon que la force d'inertie. Par suite, nous aurons, comme équation des vibrations tournantes,

$$\frac{dM_x}{dx} - \rho \int\int_\sigma \left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2}\right) d\sigma = 0. \tag{35}$$

Notons que, dans cette dernière équation, y et z désignent les coordonnées *totales* des divers points d'une section, et non leurs coordonnées *primitives*. Cela posé, on sait que $M_x = c\sigma^2 \frac{d\psi}{dx}$, où c et σ^2 ne dépendent de θ que dans la proportion infime des dilatations purement thermiques. Donc, pour la torsion φ ou $\frac{d\psi}{dx}$ qui sera à considérer, cette expression du couple de torsion n'aura pas à contenir la température θ ou à en dépendre. D'autre part, en raison des rotations très sensibles et rapides, ψ, qui se font, dans le problème actuel, autour de l'axe de la tige pris comme axe général des x, les petites déformations variables qu'éprouve chaque section σ ne donnent lieu, *si près de l'axe de rotation*, qu'à des vitesses et à des accélérations insignifiantes; de sorte qu'on a, comme dans une simple rotation d'un solide autour de l'axe des x,

$$y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(r^2 \frac{d\psi}{dt}\right) = r^2 \frac{d^2\psi}{dt^2}.$$

L'équation (35) deviendra donc, par substitution des valeurs de M_x et de $\left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2}\right)$,

$$c\sigma^2 \frac{d^2\psi}{dx^2} - \rho \frac{d^2\psi}{dt^2} \int\int_\sigma r^2 \, d\sigma = 0 \qquad \text{ou} \qquad c\sigma^2 \frac{d^2\psi}{dx^2} - \rho I_0 \frac{d^2\psi}{dt^2} = 0; \tag{36}$$

l'intégrale $\int\int_\sigma r^2 d\sigma = \int\int_\sigma (y^2+z^2)\,d\sigma$, où y et z pourront être très sensiblement réduits aux coordonnées *primitives*, n'étant autre que le moment d'inertie polaire I_0 de la section, supposée homogène.

Puisque, à une première approximation, les coefficients $c\sigma^2$ et ρI_0 de l'équation (36) ne dépendent pas de θ, il s'ensuit que les vibrations tournantes, définies par la fonction ψ de x et de t, ont lieu *comme si la température était uniforme et invariable.*

7. En résumé, nous voyons que (au degré d'approximation auquel nous nous arrêtons), parmi les trois modes de vibrations étudiés, il n'y a que les vibrations longitudinales seules sur lesquelles la température *influe toujours*, quelles que soient les propriétés thermiques de la matière qui constitue la tige : ce sont donc les plus intéressantes au point de vue thermomécanique; et nous les étudierons, en détail, pour une tige droite, homogène et isotrope.

VII. — Étude des vibrations occasionnées, dans une tige droite, fixée à ses extrémités, par le refroidissement ou l'échauffement de cette tige, supposée portée initialement à des températures données.

1. Proposons-nous d'appliquer les théories, qui viennent d'être exposées, au cas simple du refroidissement ou de l'échauffement d'une tige. L'énoncé du problème que nous traiterons est le suivant :

Une tige de longueur donnée l, primitivement droite, homogène et isotrope, dont on adopte l'axe comme axe des x, est fixée par ses extrémités contre deux appuis immobiles, distants de sa longueur naturelle à la température $\theta = 0$. La matière qui constitue la tige est, par hypothèse, bonne *conductrice de la chaleur, tandis que les appuis, au contraire, sont* mauvais *conducteurs. La tige, après avoir été mise un certain temps à des températures données $f(x)$, ce qui lui a permis de prendre un état d'équilibre mécanique bien défini, correspondant à ces températures stationnaires $f(x)$, est abandonnée à elle-même, sans vitesse initiale, dans une atmosphère maintenue à la température zéro. Étudier les vibrations longitu-*

dinales de la tige qui accompagnent le phénomène de son refroidissement ou de son échauffement, et les conditions dans lesquelles elles peuvent donner naissance à un son perceptible.

2. L'équation indéfinie du problème nous est donnée par l'égalité (33); mais, vu l'homogénéité de la matière et l'absence de force extérieure (la pesanteur et la pression atmosphérique sont en effet négligeables), celle-ci se simplifie et devient, en y supprimant les indices,

$$\rho \frac{d^2\xi}{dt^2} = \mathrm{E}\frac{d^2\xi}{dx^2} - \mathrm{ED}\frac{d\theta}{dx},$$

ou encore, en introduisant la vitesse du son a égale à $\sqrt{\frac{\mathrm{E}}{\rho}}$,

$$\frac{1}{a^2}\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2\xi}{dx^2} - \mathrm{D}\frac{d\theta}{dx}.$$

Cherchons les conditions aux limites et les conditions initiales correspondantes.

D'abord, les extrémités de la tige étant supposées fixées dans leur situation d'état naturel à la température zéro, on aura, à toute époque, $\xi = 0$ (pour $x = 0$ et pour $x = l$).

D'autre part, à l'instant initial, la loi de répartition des températures étant $f(x)$, et la vitesse $\frac{d\xi}{dt}$ nulle, nous pourrons déterminer, en fonction de $f(x)$, le déplacement initial ξ^0 en un point quelconque de la tige. En effet, la vitesse initiale nulle fait suite à un état continu de repos : il en résulte que la tension *initiale* $\mathfrak{N}^0$ est *uniforme*. Il suffit, pour s'en convaincre, de remplacer dans l'équation (22), X par $-\frac{d^2\xi}{dt^2}$, et de remarquer que l'égalité $\frac{d^2\xi}{dt^2} = 0$ entraîne la suivante $\frac{d\mathfrak{N}}{dx} = 0$, c'est-à-dire l'*uniformité* de la tension $\mathfrak{N}$ dans l'état primitif.

Soit donc $\mathfrak{N}^0$ cette tension initiale uniforme rapportée à l'unité de surface, on a, d'après la formule (31),

$$\mathfrak{N}^0 = \mathrm{E}(\partial - \mathrm{D}\theta) = \mathrm{E}\left[\frac{d\xi^0}{dx} - \mathrm{D}f(x)\right].$$

Résolvant cette dernière relation par rapport à $\frac{d\xi^0}{dx}$ et intégrant,

il vient

$$\xi^0 = \frac{\mathfrak{T}^0}{E} x + D \int_0^x f(z)\, dz,$$

sans constante arbitraire, eu égard à la fixité de l'extrémité $x = 0$.

Reste à déterminer $\mathfrak{T}^0$. La seconde extrémité $x = l$ est fixe aussi : par conséquent,

$$(37) \qquad 0 = \frac{\mathfrak{T}^0}{E} l + D \int_0^l f(z)\, dz.$$

L'équation (37) donne $\mathfrak{T}^0$, et en portant sa valeur dans l'expression de ξ^0, nous obtenons

$$\xi^0 = D \int_0^x f(z)\, dz - D \frac{x}{l} \int_0^l f(z)\, dz.$$

En définitive, nous pourrons grouper les équations du problème dans le Tableau suivant :

$$(\mathrm{I}) \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{a^2} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} = \dfrac{d^2\xi}{dx^2} - D \dfrac{d\theta}{dx}, \\ \xi = 0 \qquad (\text{pour } x = 0 \text{ et pour } x = l), \\ (\text{pour } t = 0), \quad \dfrac{d\xi}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \xi^0 = D\left[\displaystyle\int_0^x f(z)\,dz - \frac{x}{l}\int_0^l f(z)\,dz\right] = DF(x)\,[1]. \end{array} \right.$$

5. *Détermination de* θ. — L'équation indéfinie du problème renfermant le terme $\frac{d\theta}{dx}$, il est nécessaire de déterminer au préalable la température; or le calcul de θ s'effectue, du moins à une première approximation, en considérant la tige comme un solide invariable, ce qui permet d'appliquer les méthodes classiques de la théorie analytique de la chaleur.

Soit donc un tronçon de tige de longueur dx, et appelons σ et s l'aire et le périmètre de la base; l'équation usuelle des températures, posée par Biot et Fourier, est

$$C \frac{d\theta}{dt} = K \frac{d^2\theta}{dx^2} - k \frac{s}{\sigma} \theta,$$

[1] *N. B.* — Nous désignons par $F(x)$ la quantité placée entre crochets.

où C désigne la chaleur spécifique par unité de volume, K et k deux coefficients respectifs de conductibilité intérieure et de conductibilité extérieure ou superficielle.

De plus, la tige étant fixée contre deux appuis *mauvais conducteurs*, le flux de chaleur est *nul aux extrémités*, ce qui revient à dire qu'on a, à toute époque, $\frac{d\theta}{dx} = 0$ (pour $x = 0$ et pour $x = l$).

Enfin, la relation d'état initial qui achève de déterminer θ est (pour $t = 0$) $\theta = f(x)$.

Donc le système déterminant θ, à une première approximation, sera

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = b^2 \dfrac{d^2\theta}{dx^2} - \mathfrak{L}\theta, \qquad \text{en posant} \qquad \dfrac{\mathrm{K}}{\mathrm{C}} = b^2, \qquad \dfrac{k}{\mathrm{C}}\dfrac{s}{\sigma} = \mathfrak{L}; \\ \dfrac{d\theta}{dx} = 0 \qquad (\text{pour } x = 0 \text{ et pour } x = l), \\ \theta = f(x) \qquad (\text{pour } t = 0). \end{cases}$$

Ces équations sont précisément celles qui caractérisent le refroidissement du mur diathermane, d'épaisseur l, et dont les parois extrêmes sont supposées imperméables à la chaleur.

L'intégrale générale du système (II) est donnée par la superposition d'une infinité de solutions particulières vérifiant, séparément, les équations indéfinie et aux limites, chacune de ces solutions étant affectée d'un coefficient arbitraire qu'on détermine ensuite par la condition d'état initial.

Si nous posons

$$\alpha_i = \frac{i\pi}{l}, \qquad \beta_i = \frac{1}{a}(\mathfrak{L} + b^2\alpha_i^2), \qquad \mathrm{A}_i = \frac{2}{l}\int_0^l f(z)\cos\alpha_i z\,dz,$$

la solution *formelle* du problème s'écrira

$$(38)\qquad \theta = \sum_1 \mathrm{A}_i e^{-a\beta_i t}\cos\alpha_i x,$$

où nous faisons figurer explicitement dans l'exponentielle, et, par suite, implicitement dans β_i, le facteur a qui représente la vitesse du son dans la tige; ce facteur n'a, il est vrai, aucun rôle à jouer dans la question des températures; néanmoins son introduction est avantageuse, car elle nous permettra de simplifier certaines formules ultérieures relatives à ξ.

Pour que la série (38) soit la solution *effective* du problème, il faut s'assurer, en outre, que la série considérée et celles qui s'en déduisent par dérivation, terme à terme, une fois par rapport à t et deux fois de suite par rapport à x, sont *uniformément convergentes en x et t pour $t > 0$*.

Or ces propositions ont été démontrées par M. H. Poincaré [1]; et par conséquent la série (38) est la solution cherchée.

4. *Détermination de ξ.* — Remplaçons θ par sa valeur dans l'équation indéfinie du système (I). Nous sommes conduits, pour déterminer ξ, à la recherche de l'intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles linéaire et avec second membre.

Formons, en premier lieu, une solution *particulière* de l'équation complète, qui satisfasse en même temps à l'équation aux limites. On trouve ainsi, par identification et par l'emploi de coefficients indéterminés, l'expression suivante sous forme de série :

$$\xi_1 = D \sum_1^{\infty} \frac{A_i \alpha_i}{\alpha_i^2 + \beta_i^2} e^{-a\beta_i t} \sin \alpha_i x. \tag{39}$$

Cette série, comme il est facile de le vérifier, satisfait aux conditions mentionnées. Elle ne représentera cependant la solution *effective* que si l'on établit sa convergence uniforme ainsi que celle des séries obtenues en dérivant la première, terme à terme, deux fois de suite par rapport à x et à t.

A cet effet, considérons la série suivante, que nous savons être uniformément convergente,

$$\frac{d\theta}{dx} = -\sum_1^{\infty} A_i \alpha_i e^{-a\beta_i t} \sin \alpha_i x. \tag{40}$$

Or la série (39) se déduit de la proposée (40) en multipliant chaque

(1) H. Poincaré, *Étude analytique de la propagation de la chaleur*, Chap. X : *Problème de l'armille*.

terme de cette dernière par la quantité $\frac{1}{\alpha_i^2+\beta_i^2}$ *positive, décroissante et tendant vers zéro.* D'après un lemme dû à Abel, et facilement étendu au cas des séries uniformément convergentes, il en résulte que la convergence uniforme de la série (40) entraîne celle de la série (39).

On démontrerait de même que les dérivées premières et secondes de ξ_1 convergent uniformément, en comparant celles-ci à θ ou aux dérivées de cette fonction.

Cela posé, effectuons le changement de variables $\xi_2 = \xi - \xi_1$; le système (I) devient

$$
(\text{III})\quad \begin{cases} \dfrac{1}{a^2}\dfrac{d^2\xi_2}{dt^2} = \dfrac{d^2\xi_2}{dx^2}, \\ \xi_2 = 0 \qquad (\text{pour } x = 0 \text{ et pour } x = l), \\ (\text{pour } t = 0) \qquad \dfrac{d\xi_2}{dt} = -\dfrac{d\xi_1}{dt} \qquad \text{et} \qquad \xi_2^0 = \text{D}\,\text{F}(x) - \xi_1^0. \end{cases}
$$

La première équation du système (III) est celle des cordes vibrantes qui a pour intégrale générale

$$\xi_2 = \text{H}(x + at) + \text{G}(x - at),$$

H et G étant deux fonctions arbitraires.

La condition $\xi_2 = 0$ (pour $x = 0$) donne

$$\text{H}(at) + \text{G}(-at) = 0;$$

d'où l'on déduit, en remplaçant at par $at - x$,

$$\text{H}(at - x) + \text{G}(x - at) = 0,$$

et par suite

$$\xi_2 = \text{H}(x + at) - \text{H}(at - x).$$

La condition $\xi_2 = 0$ (pour $x = l$) donne

$$\text{H}(l + at) - \text{H}(at - l) = 0,$$

d'où, en remplaçant at par $at + l$,

$$\text{H}(at + 2l) = \text{H}(at).$$

Cette dernière égalité exprime que la fonction $\text{H}(u)$ est une fonction périodique de période $2l$; nous l'écrirons donc sous forme de série trigonométrique,

$$H(u) = M_0 + \sum_1^\infty (M_i \cos\alpha_i u + N_i \sin\alpha_i u). \tag{41}$$

Tâchons de déterminer les divers coefficients M_0, M_i, N_i, de façon à satisfaire aux conditions initiales, les seules qu'il reste à vérifier.

Vu l'expression précédente de $H(u)$, ξ_2 et $\frac{d\xi_2}{dt}$ pourront s'écrire respectivement

$$\begin{aligned}
\xi_2 &= H(at+x) - H(at-x) \\
&= 2\sum_1^\infty (-M_i \sin\alpha_i at + N_i \cos\alpha_i at)\sin\alpha_i x, \\
\frac{d\xi_2}{dt} &= a[H'(at+x) - H'(at-x)] \\
&= -2a\sum_1^\infty \alpha_i (M_i \cos\alpha_i at + N_i \sin\alpha_i at)\sin\alpha_i x.
\end{aligned}$$

Si maintenant nous tenons compte des conditions initiales, nous devrons avoir

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned}
&\sum_1^\infty \alpha_i M_i \sin\alpha_i x = -\frac{D}{2}\sum_1^\infty \alpha_i \frac{\beta_i A_i}{\alpha_i^2+\beta_i^2}\sin\alpha_i x, \\
&\sum_1^\infty \quad N_i \sin\alpha_i x = \frac{D}{2}F(x) - \frac{D}{2}\sum_1^\infty \frac{\alpha_i A_i}{\alpha_i^2+\beta_i^2}\sin\alpha_i x.
\end{aligned}\right.$$

La seconde des égalités (42) exige que la fonction $F(x)$ soit *impaire;* ce que nous pouvons toujours supposer puisqu'elle n'est définie qu'entre $x = 0$ et $x = l$. Dès lors, si l'on calcule les coefficients N_i par la méthode d'élimination de Fourier, les valeurs ainsi obtenues, substituées dans le premier membre $\sum_1^\infty N_i \sin\alpha_i x$, assureront sa convergence uniforme.

Les N_i sont donnés par la relation

$$N_i = \frac{D}{l}\int_0^l F(z)\sin\alpha_i z\,dz - \frac{D}{2}\frac{A_i\alpha_i}{\alpha_i^2+\beta_i^2}.$$

Quant aux M_i, on les obtient par identification des deux membres de la première équation (42) :

$$M_i = -\frac{D}{2}\frac{A_i\beta_i}{\alpha_i^2+\beta_i^2}.$$

Il est nécessaire de vérifier, pour que la démonstration soit *rigoureusement complète*, que les valeurs des M_i et N_i, transportées dans la série (41), rendent celle-ci *uniformément convergente*.

La série $\sum_1^\infty N_i \sin\alpha_i u$ étant uniformément convergente d'après la deuxième égalité (42), il suffit, pour démontrer la convergence uniforme de la série (41), d'établir la proposition pour la série $\sum_1^\infty M_i \cos\alpha_i u$.

A cet effet, remplaçons les M_i par leurs valeurs, nous aurons

$$\sum_1^\infty M_i \cos\alpha_i u = -\frac{D}{2}\sum_1^\infty \frac{A_i\beta_i}{\alpha_i^2+\beta_i^2}\cos\alpha_i u.$$

Or les coefficients $\frac{A_i\beta_i}{\alpha_i^2+\beta_i^2}$ sont *positifs, décroissants et tendent vers zéro*, il en résulte [1] que la série $\sum_1^\infty \frac{A_i\beta_i}{\alpha_i^2+\beta_i^2}\cos\alpha_i u$ converge uniformément et la proposition est établie.

La fonction ξ_2 du système (III), *maintenant calculée en toute rigueur*, s'écrira, après substitution des valeurs trouvées pour M_i et N_i,

$$(43)\qquad \xi_2 = 2\frac{D}{l}\sum_1^\infty \cos\alpha_i a t \sin\alpha_i x\int_0^l F(z)\sin\alpha_i z\,dz$$
$$-D\sum_1^\infty \frac{A_i}{\alpha_i^2+\beta_i^2}(\alpha_i\cos\alpha_i at - \beta_i\sin\alpha_i at)\sin\alpha_i x.$$

Ajoutant, à l'expression trouvée de ξ_2, celle de ξ_1 définie par la rela-

---

(1) E. PICARD, *Traité d'Analyse*, t. I, Chap. IX, n° 9.

tion (39), nous obtiendrons finalement la solution ξ du problème :

$$(44)\quad \xi = \xi_1 + \xi_2 = 2\frac{D}{l}\sum_1^\infty \cos\alpha_i at \sin\alpha_i x \int_0^l F(z)\sin\alpha_i z\,dz$$
$$+ D\sum_1^\infty \frac{A_i\alpha_i}{\alpha_i^2+\beta_i^2}\left(\frac{\beta_i}{\alpha_i}\sin\alpha_i at - \cos\alpha_i at + e^{-a\beta_i t}\right)\sin\alpha_i x.$$

Cette dernière égalité peut se ramener à une autre, susceptible d'une interprétation physique immédiate, si l'on effectue les changements suivants. Posons

$$(45)\quad \begin{cases} B_i = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l F(z)\sin\alpha_i z\,dz, \qquad \operatorname{tang}\gamma_i = \dfrac{B_i(\alpha_i^2+\beta_i^2) - A_i\alpha_i}{A_i\beta_i}, \\ C_i = \sqrt{B_i^2 + \dfrac{A_i(A_i - 2B_i\alpha_i)}{\alpha_i^2+\beta_i^2}}; \end{cases}$$

nous aurons, de la sorte, en groupant les termes périodiques par rapport au temps,

$$(46)\quad \xi = D\sum_1^\infty \left[\frac{A_i\alpha_i}{\alpha_i^2+\beta_i^2}e^{-a\beta_i t} + C_i\sin(\alpha_i at + \gamma_i)\right]\sin\alpha_i x.$$

Sous cette forme, nous voyons que, d'une manière générale, le mouvement longitudinal occasionné par le refroidissement de la tige sera la superposition d'un mouvement progressif de contraction ou de dilatation, qui s'évanouit asymptotiquement comme l'échauffement lui-même, et d'un mouvement vibratoire.

Il est intéressant de remarquer qu'outre le mouvement longitudinal, il se produira, dans les sens transversaux, des phénomènes périodiques de dilatation et de contraction, analogues à ceux qui prennent naissance suivant l'axe de la tige, mais d'amplitude beaucoup moindre. En effet, la dilatation superficielle d'une section droite de la tige a pour expression

$$\partial'_\sigma = \partial'_y + \partial'_z = (D_y + D_z)\theta + (\partial_y + \partial_z).$$

Or, en vertu de l'isotropie,

$$D_y = D_z = D, \qquad \partial_y + \partial_z = -\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\partial_x = -\frac{\lambda}{\lambda+\mu}(\partial'_x - D\theta);$$

d'où

$$\partial_\sigma' = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} D\theta - \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\frac{d\xi}{dx}.$$

La substitution des valeurs de θ et de $\frac{d\xi}{dx}$ donne, pour ∂_σ', une expression où $\cos\alpha_i x$ est en facteur.

Il en résulte une correspondance entre les maxima et les minima des variables ξ et ∂_σ', considérées en tant que fonctions de x : ainsi, au milieu de la tige, la section σ ne subit ni contraction ni dilatation, mais l'allongement ξ des fibres y est le plus grand possible; le contraire se produit aux extrémités.

5. Poursuivons l'étude du phénomène dans les deux cas suivants, où la répartition *initiale* des températures est particulièrement simple :

Premier cas. — *La température initiale de la tige est uniforme.*

Dans cette hypothèse, les coefficients A_i sont tous nuls ; il suffit, pour le constater, de se reporter à l'intégrale $\frac{2}{l}\int_0^l f(z)\cos\alpha_i z\, dz$ qui définit les A_i, et d'y faire $f(z) = \text{const}$.

Même conclusion pour les B_i; car la fonction $F(x)$, qui a pour expression

$$F(x) = \int_0^x f(z)\, dz - \frac{x}{l}\int_0^l f(z)\, dz,$$

s'annule aussi identiquement pour $f(z) = \text{const}$.

Enfin, d'après l'égalité qui détermine les C_i, il résulte que la nullité des A_i et B_i entraîne celle des C_i.

Somme toute, nous voyons que, lorsque la température initiale de la tige est uniforme, les coefficients A_i et C_i sont nuls, et, par suite, nul aussi à toute époque le déplacement ξ : autrement dit, dans ce cas, le refroidissement ne donne naissance à *aucune vibration*, soit longitudinale, soit transversale.

Quant à la tension $\mathfrak{T}$ dont la formule générale est

$$\mathfrak{T} = E\sigma\left(\frac{d\xi}{dx} - D\theta\right),$$

elle sera simplement, puisque $\frac{d\zeta}{dx} = 0$, $\mathfrak{N} = -ED\sigma\theta$. La tension $\mathfrak{N}$ reste donc uniforme pendant toute la durée du phénomène et proportionnelle à la température θ qui est, elle-même, une fonction *évanouissante* du temps. La même remarque s'applique à la dilatation superficielle latérale ∂_σ qui se réduit à $2D\theta$.

Deuxième cas. — *La température initiale de la tige, dont une moitié a été chauffée, l'autre refroidie, est distribuée symétriquement par rapport au milieu de la tige et dépend linéairement de l'abscisse x.*

Il résulte des suppositions faites, qu'on a

$$f(x) = m\left(x - \frac{l}{2}\right),$$

où m désigne la *pente* de la température, c'est-à-dire marque la rapidité avec laquelle celle-ci varie le long de la tige.

Vu la symétrie de la fonction $f(x)$ par rapport au milieu, nous avons

$$\int_0^l f(z)\,dz = 0.$$

et par conséquent la fonction $F(x)$, déjà définie, se réduit à l'expression simple

$$F(x) = \int_0^x f(z)\,dz = \int_0^x m\left(z - \frac{l}{2}\right)dz = \frac{m}{2}(x^2 - lx).$$

Dès lors, les coefficients A_i, B_i, C_i deviennent

$$A_i = \frac{2}{l}\int_0^l f(z)\cos\alpha_i z\,dz = \frac{2m}{l}\int_0^l\left(z - \frac{l}{2}\right)\cos\alpha_i z\,dz = -2ml\,\frac{1-\cos i\pi}{i^2\pi^2},$$

$$B_i = \frac{2}{l}\int_0^l F(z)\sin\alpha_i z\,dz = \frac{m}{l}\int_0^l (z^2 - lz)\sin\alpha_i z\,dz = -2ml^2\,\frac{1-\cos i\pi}{i^3\pi^3},$$

$$C_i = \sqrt{B_i^2 + \frac{A_i(A_i - 2B_i\alpha_i)}{\alpha_i^2+\beta_i^2}} = -2ml^2\,\frac{1-\cos i\pi}{i^3\pi^3}\,\frac{\beta_i}{\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}}.$$

De même l'angle γ_i qui détermine la *phase* du mouvement vibratoire a, ici, pour expression

$$\operatorname{tang}\gamma_i = \frac{B_i(\alpha_i^2+\beta_i^2) - A_i\alpha_i}{A_i\beta_i} = \frac{\beta_i}{\alpha_i}.$$

Par substitution des valeurs présentes de A_i, C_i, γ_i dans les formules (38) et (46), nous obtenons

$$(47)\quad \begin{cases} \theta = -2m \displaystyle\sum_1^\infty \frac{1-\cos i\pi}{i\pi} e^{-\alpha\beta_i t} \frac{\cos\alpha_i x}{\alpha_i}, \\ \xi = -2Dm \displaystyle\sum_1^\infty \frac{1-\cos i\pi}{i\pi} \frac{\sin\alpha_i x}{\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}} \left[\frac{e^{-a\beta_i t}}{\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}} + \frac{\beta_i}{\alpha_i^2}\sin(\alpha_i at+\gamma_i) \right]. \end{cases}$$

Donc, lorsque les températures initiales sont réparties le long de la tige suivant la loi $f(x) = m\left(x - \frac{l}{2}\right)$, les refroidissement et échauffement respectifs des deux moitiés de la tige engendrent des vibrations longitudinales : le milieu est un ventre de vibration; les extrémités, des nœuds. En outre, il n'existe d'autres harmoniques que ceux qui correspondent à la suite des nombres entiers impairs consécutifs.

Reste à traiter une dernière question : l'amplitude du mouvement vibratoire considéré est-elle suffisante pour donner naissance à un son perceptible ? Pour la résoudre, nous comparerons les vibrations, d'origine calorifique, du problème proposé, à celles qui seraient produites si la tige, au lieu d'être *fixe*, était *libre* aux extrémités, et la température, *uniforme*, au lieu d'être une *fonction linéaire et symétrique de l'abscisse* $\left(x - \frac{l}{2}\right)$.

VIII. — Comparaison des vibrations, d'origine calorifique, précédemment étudiées, à celles qu'engendrerait le refroidissement d'une tige, libre aux extrémités, de température initiale uniforme.

1. Le problème de l'état vibratoire où entre une tige, *libre* à ses deux bouts, *uniformément* chauffée à l'instant initial, qui se refroidit par rayonnement sur sa longueur et *par contact* aux extrémités, a été traité par M. L. Roy dans sa Thèse. Nous le reprendrons rapidement

en suivant notre analyse et nous montrerons que la solution de ce problème se déduit, *par simple dérivation*, des résultats de celui que nous venons de traiter.

2. L'équation indéfinie étant la même que celle du système (I), il suffit d'établir les conditions aux limites et les conditions initiales qui conviennent au cas présent.

La tige est *libre* à ses deux bouts : d'où $\mathfrak{N} = 0$ (pour $x = 0$ et pour $x = l$).

On admet, en outre, que le refroidissement se fait *par contact* aux extrémités, où la température θ est supposée *nulle;* il en résulte, vu l'expression (31) de $\mathfrak{N}$, qu'on a

$$\frac{d\xi}{dx} = 0 \qquad (\text{pour } x = 0 \text{ et pour } x = l).$$

La température initiale est *uniforme* et égale à θ^0 : cette donnée permet d'évaluer l'allongement *initial* ξ^0 en un point quelconque de la tige. On a, en effet,

$$\partial^0 = \frac{d\xi^0}{dx} = D\theta^0;$$

d'où il vient, par intégration,

$$\xi^0 = D\theta^0\left(x - \frac{l}{2}\right),$$

car la section de la tige qui contient le centre de gravité n'éprouve pas de déplacement longitudinal.

Nous sommes donc conduits au système (IV), composé comme suit :

$$(\text{IV})\quad \begin{cases} \dfrac{1}{a^2}\dfrac{d^2\xi}{dt^2} = \dfrac{d^2\xi}{dx^2} - D\dfrac{d\theta}{dx}, \\[2ex] \dfrac{d\xi}{dx} = 0 \qquad (\text{pour } x = 0 \text{ et pour } x = l), \\[2ex] (\text{pour } t = 0) \qquad \dfrac{d\xi}{dt} = 0 \qquad \text{et} \qquad \xi^0 = D\theta^0\left(x - \dfrac{l}{2}\right). \end{cases}$$

Pour la détermination complète du problème, il faut joindre à ce système le suivant, auquel satisfait θ lorsqu'on traite la tige comme un solide invariable :

$$
(\mathrm{V}) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{d\theta}{dt} = b^2\frac{d^2\theta}{dx^2} - \xi\theta; \\
&\theta = 0 \qquad (\text{pour } x = 0 \text{ et pour } x = l), \\
&(\text{pour } t = 0) \qquad \theta = \theta^0.
\end{aligned}
\right.
$$

5. Nous démontrerons maintenant que les solutions des systèmes (IV) et (V) se déduisent, par dérivation, de celles des systèmes (I) et (II) où l'on pose

$$
f(x) = \theta^0\left(x - \frac{l}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{F}(x) = \int_0^x \theta^0\left(z - \frac{l}{2}\right) dz.
$$

Avec les valeurs considérées de $f(x)$ et $\mathrm{F}(x)$, les systèmes (I) et (II) s'écrivent :

$$
(\mathrm{VI}) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{a^2}\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2\xi}{dx^2} - \mathrm{D}\frac{d\theta}{dx}; \\
&\xi = 0 \qquad (\text{pour } x = 0 \text{ et } x = l), \\
&(\text{pour } t = 0) \qquad \frac{d\xi}{dt} = 0 \qquad \text{et} \qquad \xi^0 = \mathrm{D}\int_0^x \theta^0\left(z - \frac{l}{2}\right) dz.
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(\mathrm{VII}) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{d\theta}{dt} = b^2\frac{d^2\theta}{dx^2} - \xi\theta; \\
&\frac{d\theta}{dx} = 0 \qquad (\text{pour } x = 0 \text{ et } x = l), \\
&(\text{pour } t = 0) \qquad \theta = \theta^0\left(x - \frac{l}{2}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

La seconde ligne des formules (VI) donne d'ailleurs, aux deux bouts de la tige, $\frac{d^2\xi}{dt^2} = 0$, et, vu la seconde ligne des formules (VII), la première équation du système (VI) donne en même temps les deux relations spéciales supplémentaires

$$
(48) \qquad \frac{d^2\xi}{dx^2} = 0 \qquad (\text{pour } x = 0 \text{ et } x = l).
$$

Cela posé, différentions en x les première et dernière des relations (VI), et des relations (VII), en appelant θ', ξ' les deux dérivées en x de θ et de ξ. Il viendra, vu d'ailleurs la formule (48) et la seconde ligne du système (VII).

$$
(\text{VIII}) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{a^2}\frac{d^2\xi'}{dt^2} = \frac{d^2\xi}{dx^2} - D\frac{d\theta'}{dx};\\
&\frac{d\xi'}{dx} = 0 \qquad (\text{pour } x = 0 \text{ et } x = l),\\
&(\text{pour } t = 0) \qquad \frac{d\xi'}{dt} = 0 \qquad \text{et} \qquad \xi'^0 = D\theta^0\left(x - \frac{l}{2}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(\text{IX}) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{d\theta'}{dt} = b^2\frac{d^2\theta'}{dx^2} - \varsigma\theta';\\
&\theta' = 0 \qquad (\text{pour } x = 0 \text{ et } x = l),\\
&(\text{pour } t = 0) \qquad \theta' = \theta^0.
\end{aligned}
\right.
$$

Il est clair que les deux derniers systèmes obtenus ne sont autres que les systèmes (IV) et (V). Or les formules (47) nous donnent précisément les solutions des systèmes (I) et (II) lorsque $f(x) = m\left(x - \frac{l}{2}\right)$ et $F(x) = \int_0^x m\left(z - \frac{l}{2}\right)dz$; il suffit donc d'y remplacer m par θ^0, puis de dériver par rapport à x, pour avoir les solutions du problème cherché. De la sorte, on trouve

$$
(49) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\theta = 2\theta^0\sum_1^\infty \frac{1-\cos i\pi}{i\pi} e^{-a\beta_i t}\sin\alpha_i x,\\
&\xi = -2D\theta^0\sum_1^\infty \frac{1-\cos i\pi}{i\pi}\,\frac{\cos\alpha_i x}{\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}}\left[\frac{\alpha_i e^{-a\beta_i t}}{\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}} + \frac{\beta_i}{\alpha_i}\sin(\alpha_i a t + \gamma_i)\right].
\end{aligned}
\right.
$$

Il est facile de s'assurer que les séries (49) convergent uniformément et, par suite, qu'elles représentent bien les solutions *effectives* (1).

(1) M. Boussinesq a bien voulu nous indiquer cette manière de déduire le système (49) du système (47) et nous faire observer qu'il est possible de déduire les résultats du problème de M. L. Roy de ceux du problème que nous traitons, dans l'hypothèse, *plus large*, où la fonction $f(x)$, au lieu d'être, comme nous l'avons supposé, *linéaire et symétrique par rapport au milieu de la tige*, est *quelconque*, *mais à valeur moyenne nulle entre $x = 0$ et $x = l$*; il nous a fait remarquer, en outre, que, *réciproquement*, on peut obtenir, par dérivation de la solution du problème de M. L. Roy, celle de notre problème.

Supposons, en effet, que $f(x)$ soit une fonction quelconque, à valeur moyenne

4. Nous voyons donc que les mouvements vibratoires définis par les secondes des relations (47) et (49) sont en concordance de phase et ont mêmes harmoniques. Le rapport de deux harmoniques correspondants

---

nulle entre $x = 0$ et $x = l$. La fonction $F(x)$, déjà définie, se réduit à l'expression simple $D\int_0^x f(z)\,dz$, et les équations de notre problème deviennent

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{a^2}\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2\xi}{dx^2} - D\frac{d\theta}{dx};\\ &\xi = 0 \qquad (\text{pour } x = 0 \text{ et } x = l),\\ &(\text{pour } t = 0)\qquad \frac{d\xi}{dt} = 0 \qquad \text{et} \qquad \xi = D\int_0^x f(z)\,dz; \end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\theta}{dt} = b^2\frac{d^2\theta}{dx^2} - \zeta\theta;\\ &\frac{d\theta}{dx} = 0 \qquad (\text{pour } x = 0 \text{ et } x = l),\\ &(\text{pour } t = 0) \qquad \theta = f(x). \end{aligned}\right.$$

En raisonnant comme il a été fait, on déduit du rapprochement des conditions aux limites des systèmes (1) et (2) les deux relations supplémentaires

$$(3)\qquad \frac{d^2\xi}{dx^2} = 0 \qquad (\text{pour } x = 0 \text{ et } x = l).$$

Dès lors, en dérivant les première et dernière des relations (1) et des relations (2), on obtient, vu la formule (3) et la seconde ligne de (2), les deux systèmes suivants en ξ' et θ' (ξ', θ' désignant les dérivées en x de ξ et de θ) :

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{a^2}\frac{d^2\xi'}{dt^2} = \frac{d^2\xi'}{dx^2} - D\frac{d\theta'}{dx};\\ &\frac{d\xi'}{dx} = 0 \qquad (\text{pour } x = 0 \text{ et } x = l),\\ &(\text{pour } t = 0) \qquad \frac{d\xi'}{dt} = 0 \qquad \text{et} \qquad \xi' = D f(x). \end{aligned}\right.$$

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\theta'}{dt} = b^2\frac{d^2\theta'}{dx^2} - \zeta\theta';\\ &\theta' = 0 \qquad (\text{pour } x = 0 \text{ et } x = l),\\ &(\text{pour } t = 0) \qquad \theta' = f'(x). \end{aligned}\right.$$

Or ce sont précisément les équations du problème de M. L. Roy. *Donc, en* est $r_i = \frac{m}{\theta^0}\frac{1}{\alpha_i}$, qui devient, pour $i = 1$ (c'est le cas des harmoniques *fondamentaux*),

$$r_1 = \frac{m}{\theta^0}\frac{1}{\alpha_1} = \frac{ml}{\pi\theta^0} = \frac{\Delta\theta}{\pi\theta^0},$$

où $\Delta\theta$ désigne l'*écart initial* des températures aux extrémités de la tige, la loi de distribution de celles-ci étant $f(x) = m\left(x - \frac{l}{2}\right)\cdot$ Il en résulte que les sons fondamentaux auront *même intensité* dans les deux

---

différentiant en x les valeurs de θ et de ξ de notre problème, on obtient la solution d'un problème de M. L. Roy.

Mais continuons. Observons que la seconde ligne des équations (5) entraîne aux deux bouts ($x = 0$ et $x = l$) la relation $\frac{d\theta'}{dt} = 0$, non moins que $\theta = 0$; en sorte que la première (5) donne

$$\frac{d^2\theta'}{dx^2} = 0 \qquad (\text{pour } x = 0 \text{ et } x = l). \tag{6}$$

Alors les première et dernière (4), première et dernière (5), différentiées en x, conduisent à poser, vu (6) et la seconde ligne des relations (4), en appelant ξ'' et θ'' les deux dérivées en x de ξ' et θ',

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{a^2}\frac{d^2\xi''}{dt^2} = \frac{d^2\xi''}{dx^2} - D\frac{d\theta''}{dx}; \\ \xi'' = 0 \qquad (\text{pour } x = 0 \text{ et } x = l), \\ (\text{pour } t = 0) \qquad \frac{d\xi''}{dt} = 0 \qquad \text{et} \qquad \xi'' = D f'(x). \end{array}\right.$$

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{d\theta''}{dt} = b^2\frac{d^2\theta''}{dx^2} - c\theta''; \\ \frac{d\theta''}{dx} = 0 \qquad (\text{pour } x = 0 \text{ et } x = l), \\ (\text{pour } t = 0) \qquad \theta'' = f''(x). \end{array}\right.$$

Donc, réciproquement, les dérivées en x d'une solution d'un problème de M. L. Roy constituent, elles-mêmes, la solution du problème que nous avons traité.

Il est essentiel de remarquer que, les solutions de ces deux problèmes étant exprimées par des séries trigonométriques, il faudra, chaque fois, vérifier la convergence uniforme de ces dernières.

mouvements vibratoires, d'origine calorifique, si entre $\Delta\theta$ et θ^0 on a relation $\frac{\Delta\theta}{\theta^0} = \pi$.

5. Pour achever notre étude, nous tâcherons d'*interpréter physiquement* les résultats obtenus, et, à cet effet, nous comparerons, terme à terme, les deux mouvements vibratoires, d'origine calorifique, dont il vient d'être question, avec celui que produirait, à la température constante $\theta = 0$, la suppression brusque d'une tension ayant préalablement donné lieu au *même allongement statique* que l'échauffement uniforme de la tige de 0 à θ^0.

Dans ce cas, le système qui régit le déplacement longitudinal ξ est

$$(\mathrm{X})\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{a^2}\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2\xi}{dx^2},\\ &\frac{d\xi}{dx} = 0 \qquad (\text{pour } x = 0 \text{ et pour } x = l),\\ &\frac{d\xi}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \xi^0 = \mathrm{D}\theta^0\left(x - \frac{l}{2}\right) \qquad (\text{pour } t = 0).\end{aligned}\right.$$

La solution de ce système est évidemment

$$\xi = \sum_1^\infty \mathrm{A}_i \cos\alpha_i x \cos\alpha_i a t,$$

où

$$\mathrm{A}_i = \frac{2\mathrm{D}\theta^0}{l}\int_0^l \left(z - \frac{l}{2}\right)\cos\alpha_i z\, dz,$$

ou encore, par substitution des valeurs A_i,

$$(50)\qquad \xi = -2\mathrm{D}\theta^0 l \sum_1^\infty \frac{1 - \cos i\pi}{i^2\pi^2}\cos\alpha_i x \cos\alpha_i a t.$$

Ici, comme d'ailleurs dans les mouvements vibratoires précédents, il n'existe que les harmoniques *impairs*. L'amplitude respective de ces derniers variant en raison inverse du carré de 1, 3, 5, ..., l'intensité correspondante décroît comme la quatrième puissance des mêmes nombres; et, par suite, les premiers harmoniques seuls pourront être perçus.

6. Les expressions (47) et (50) nous permettent de former le rapport r'_i de l'amplitude de l'harmonique de rang i, dans le mouvement vibratoire, d'origine calorifique, produit par les refroidissement et échauffement respectifs des deux moitiés d'une tige, *fixe*, *initialement portée à la température variable* $f(x) = m\left(x - \frac{l}{2}\right)$, à l'amplitude de l'harmonique de même rang, dans le mouvement vibratoire, *d'origine mécanique*. Nous obtenons ainsi

$$r'_i = \frac{m}{\theta_0} \frac{1}{\alpha_i} \frac{\beta_i}{\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}}.$$

De même, les formules (49) et (50) nous donnent le rapport r''_i de l'amplitude des harmoniques correspondants dans le mouvement vibratoire, d'origine calorifique, engendré par le refroidissement d'une tige *libre*, *de température initiale uniforme*, et le mouvement *d'origine mécanique*. D'où

$$r''_i = \frac{\beta_i}{\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}}.$$

Étudions les variations de r'_i et r''_i lorsque α_i croît de α_1 ou $\frac{\pi}{l}$ jusqu'à l'infini. — Les variations de r'_i sont les mêmes que celles de la quantité $\frac{1}{\alpha_i} \frac{\beta_i}{\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}}$; or, en remplaçant β_i par sa valeur $\frac{1}{a}(g + b^2\alpha_i^2)$, on constate que la quantité considérée décroît *progressivement* de r'_1 à 0. Donc, pour une tige de longueur donnée, le rapport r'_i diminue, quand grandit l'ordre des harmoniques : il sera donc maximum pour le son fondamental, et ce maximum sera d'autant plus grand que la tige sera plus longue. Il suit de là qu'il faudra opérer sur des tiges *très longues*, si l'on veut que les refroidissement et échauffement respectifs des deux moitiés d'une tige, *fixe*, *initialement portée à la température variable* $f(x) = m\left(x - \frac{l}{2}\right)$, puissent donner lieu à un son perceptible.

Les variations de r''_i sont celles de la fraction $\frac{\beta_i}{\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}}$, dont le carré a pour expression l'inverse de $1 + \frac{\alpha_i^2}{\beta_i^2}$ ou de $1 + \frac{a^2}{b^2\left(\alpha_i + \frac{g}{b^2\alpha_i}\right)^2}$; cette fraction $\dfrac{\beta_i}{\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}}$ varie donc dans le même sens que le binome $\alpha_i + \dfrac{\mathcal{K}}{b^2\alpha_i}$. Or celui-ci, quand on y assimile α_i à une variable continue, passe. pour $\alpha_i = \dfrac{\sqrt{\mathcal{K}}}{b}$, par le minimum $2\dfrac{\sqrt{\mathcal{K}}}{b}$, de part et d'autre duquel il grandit jusqu'à l'infini. Par suite, le rapport r_i'', minimum et égal à l'inverse de $\sqrt{1+\dfrac{a^2}{4b^2\mathcal{K}}}$, quand α_i reçoit la valeur spéciale $\dfrac{\sqrt{\mathcal{K}}}{b}$, grandit à mesure que α_i s'éloigne de cette valeur : et il tend vers l'unité pour les valeurs de α_i, soit évanouissantes, soit grandissantes sans limite.

Il résulte de là que, pour un harmonique de rang déterminé, le rapport r_i'' sera d'autant plus grand que la longueur l sera, elle-même, ou plus petite, ou plus grande, en s'éloignant de la valeur limite $i\pi\dfrac{b}{\sqrt{\mathcal{K}}}$ qui rend ce rapport minimum ; autrement dit, il faudra se servir de tiges, ou *très courtes*, ou *très longues*, si l'on veut que celles-ci, supposées *libres et de température initiale uniforme*, donnent, par refroidissement, un son d'intensité appréciable. Mais un calcul numérique ultérieur montrera qu'en se bornant au cas où l'on fait $i=1$, c'est-à-dire aux harmoniques *fondamentaux* (que nous savons être les plus intenses de tous les harmoniques), la valeur $\pi\dfrac{b}{\sqrt{\mathcal{K}}}$ est trop petite pour que, physiquement, la longueur d'une tige puisse devenir encore moindre. Il faudra donc prendre seulement les barres *les plus longues possible*.

7. Nous allons faire l'application numérique, en prenant les mêmes données que M. L. Roy, dans sa Thèse, c'est-à-dire dans le cas d'une tige de cuivre de section circulaire, supposée placée dans un courant d'air atmosphérique à la température 0°, dirigé normalement à l'axe de la tige et animé d'une vitesse uniforme V. M. Boussinesq a démontré ([1]) que, dans ces conditions, le coefficient de conductibilité

([1]) J. Boussinesq, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 6e série, t. I, 1905. Cette formule fait abstraction de la partie de k due à la chaleur échangée par rayonnement entre la couche superficielle de la barre (*athermane*) extérieure k était donné par la formule

$$k = 4\sqrt{\frac{K_1 C_1 V}{\pi^3 \varepsilon}},$$

dans laquelle K_1 désigne le coefficient de conductibilité interne du fluide, C_1 sa capacité calorifique par unité de volume, ε le rayon de la section de la tige. Dans le système C. G. S., petite calorie, degré centigrade, et à la température de la glace fondante, on a

$$K_1 = 5.10^{-5}, \qquad C_1 = 3,06.10^{-4}.$$

Si nous prenons $V = 400^{cm}$, ce qui correspond à une brise légère, nous trouverons, pour une tige de 1^{cm} de diamètre ($\varepsilon = 0,5$),

$$k = 2,51.10^{-3}.$$

Ajoutons aux données précédentes, relatives au cuivre, les valeurs de son coefficient de conductibilité $K = 0,819$, de son coefficient de dilatation linéaire $D = 17,18.10^{-6}$, et de la vitesse du son dans le cuivre, $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 3,42.10^5$.

Cela posé, cherchons, avec les données numériques choisies, la valeur de l'expression $\pi\frac{b}{\sqrt{C}}$ qui donne la longueur de la tige correspondant au *minimum de* r''_1, c'est-à-dire au *minimum* du rapport des amplitudes *fondamentales* dans les deux mouvements vibratoires mentionnés. On trouve ainsi, tous calculs faits, $\pi\frac{b}{\sqrt{C}} = 26^{cm},7$. Si, maintenant, nous considérons les valeurs de l, qui vont s'écartant de cette dernière $26^{cm},7$, les unes tendant vers zéro, les autres grandissant jusqu'à l'infini, d'après ce que nous savons déjà, le rapport r''_1 augmente et tend, dans les deux cas, vers l'unité. En particulier, on constate que les valeurs *évanouissantes* de l, qui donnent au rapport r''_1 une valeur voisine de l'unité, sont de l'ordre du millième de millimètre :

---

et l'éther ambiant (partie proportionnelle au cube de la température absolue de cet éther), comparativement à la chaleur emportée ou apportée par la convection du courant d'air : elle cesserait d'être admissible aux très hautes températures absolues.

ceci prouve et justifie la remarque faite antérieurement, à savoir qu'au point de vue de la perceptibilité des sons, le cas d'une tige *courte* ne doit pas être envisagé.

Nous supposerons donc que l'expérience se fait sur une tige très longue, et que nous choisissons sa longueur de façon que le terme fondamental corresponde à un son qui soit à la limite des sons graves perceptibles, dont la fréquence serait égale à 8, d'après les expériences de Savart. Pour une longueur de 200^{m} ($l = 2.10^4$), on trouve une fréquence fondamentale $n_1 = \frac{a}{2l} = 8,55$, et pour les quantités α_1, β_1, les valeurs

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{l} = 1,57.10^{-4},$$

$$\beta_1 = \frac{1}{a}(\mathcal{L} + b^2\alpha_1^2) = \frac{K}{Ca}\left(\frac{2}{\varepsilon}\frac{k}{K} + \alpha_1^2\right) = 1,724.10^{-7},$$

en tenant compte des expressions de $b^2 = \frac{K}{C}$ et de $\mathcal{L} = \frac{k}{C}\frac{s}{\sigma}$.

Examinons, en premier lieu, le cas où la tige est *libre* aux extrémités et, *à l'instant initial, chauffée uniformément* à 200°. On aura, en désignant par A_c l'amplitude fondamentale dans le mouvement *d'origine calorifique*, par A_m l'amplitude fondamentale dans le mouvement *d'origine mécanique*,

$$\frac{A_c}{A_m} = r_1'' = \frac{\beta_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}} = 1,09.10^{-3};$$

or, vu la formule (50), on a

$$A_m = 2lD\theta^0\frac{4}{\pi^2},$$

d'où l'on déduit, en effectuant,

$$A_c = \frac{\beta_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}}A_m = 0^{cm},032.$$

En second lieu, si la tige, au lieu d'être libre, est *fixée* aux extrémités, et si, de plus, *la température initiale* qui, tout à l'heure, était uniforme, *varie suivant la loi* $f(x) = m\left(x - \frac{l}{2}\right)$, il vient, en représentant par A'_c l'amplitude fondamentale dans ce *second* mouvement *d'origine calorifique*,

$$\frac{A_c}{A_m} = r'_1 = \frac{ml}{\pi\theta^0}\frac{\beta_1}{\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}} = \frac{\Delta\theta}{\pi\theta^0}\frac{\beta_1}{\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}}.$$

Donc, *pour un écart de 400°, par exemple, entre les extrémités* ($\Delta\theta = 400^\circ$),

$$A'_c = \frac{2}{\pi}\frac{\beta_1}{\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}}A_m = 0^{cm},020.$$

En se basant sur les données de l'expérience ([1]), on peut conclure que les amplitudes de ces deux sortes de mouvements vibratoires, d'origine calorifique, sont largement suffisantes pour permettre au son fondamental d'être perçu.

Ainsi donc, à condition toutefois d'opérer sur des tiges *très longues*, les vibrations, d'origine calorifique, des deux cas étudiés seront susceptibles de donner naissance à un son perceptible; ce son sera d'autant plus grave que la tige est plus longue.

Nous avons remarqué, au n° 4 de ce paragraphe, que les amplitudes fondamentales des deux mouvements vibratoires, d'origine calorifique, ont même valeur, si, entre l'*écart initial* $\Delta\theta$ des températures aux extrémités de la tige *fixe* et la température *initiale uniforme* θ^0 de la tige *libre*, il existe un rapport égal à π. Il est donc intéressant de mentionner qu'en ce qui concerne l'exemple numérique choisi, pour que le son fondamental, perçu de part et d'autre, ait même intensité, il faut que l'écart initial des températures aux extrémités de la tige fixe soit $\Delta\theta = \pi.200 = 628^\circ$.

([1]) Parmi les physiciens qui, en ces derniers temps, ont recherché l'amplitude minima que devait avoir un son de hauteur donnée pour pouvoir être perçu, on peut citer :

WIEN, *Phys. Zeitschr.*, t. IV, 1902, p. 69; *Verh. d. d. phys. Ges.*, t. IV, 1902, p. 297, qui a trouvé comme minimum d'amplitude a du corps vibrant (membrane de téléphone), pour une fréquence N :

$N = 200$,	400,	600,	1050.
$a = 1,5.10^{-6}$,	7.10^{-7},	$1,4.10^{-7}$,	$1,1.10^{-8}$ centim.

OSTMANN, *Verh. d. d. phys. Ges.*, t. V, 1903, p. 340, qui trouve : sur des diapasons graves $a = 0^{mm},07$; élevés $a = 1,6.10^{-8}$ millim.

DEUXIÈME PARTIE.

LES PLAQUES.

I. — Préliminaires.

1. Nous nous proposons, dans cette seconde Partie, d'étendre à l'étude thermomécanique des plaques, le mode d'investigation qui nous a servi pour les tiges.

Les plaques considérées sont, ou homogènes, ou constituées par des feuillets de nature différente accolés les uns aux autres; nous admettrons seulement que tout plan parallèle au *feuillet moyen* de la plaque est un plan de symétrie de contexture. Cette hypothèse nous permettra d'utiliser un certain nombre de formules et de résultats établis dans la première Partie, et, en même temps, d'obtenir la solution du problème à une approximation plus élevée. Sous le nom de *feuillet moyen*, nous entendons la surface matérielle, sensiblement parallèle aux deux faces de la plaque, qui contient les centres de gravité des normales, menées à cette même surface et d'une face à l'autre dans l'état primitif, les centres dont il s'agit étant déterminés d'après la supposition que chaque élément des normales ait une masse, par unité de longueur, égale à la valeur du coefficient d'élasticité C [1] sur cet élément.

2. Supposons la plaque divisée en tronçons sensiblement prismatiques, dont chacun, limité par la surface même du corps et par deux couples de plans parallèles menés normalement à la surface, ait ses trois dimensions comparables entre elles. Sauf certaines régions peu étendues, telles que les bords de la plaque, deux tronçons voisins quelconques sont généralement dans des conditions physiques *presque*

---

[1] Ce coefficient C sera défini un peu plus loin.

identiques: on atteint, par suite, une *première approximation*, en supposant que les six déformations (∂, g) et la température θ ne varient pas sur toute l'étendue d'une couche parallèle aux bases d'un tronçon, pris isolément; de plus, l'excellente conductibilité de la plaque, comparée à celle de l'atmosphère ambiante, assure l'uniformité de la température le long d'une perpendiculaire quelconque aux bases du tronçon considéré. La conclusion de notre analyse sera donc : *En tous les points d'un tronçon quelconque, pris isolément, la température est la même.*

Ainsi, nous pourrons étendre aux plaques le procédé, déjà employé pour les tiges, qui consiste à appliquer, pour l'étude de l'équilibre et du mouvement d'un tronçon *à l'instant t*, les équations *ordinaires* de l'élasticité, en comptant les déplacements et les déformations à partir de l'état naturel relatif à la température θ effective.

5. Soit un tronçon quelconque dans son *état primitif* qui, par définition, sera l'*état naturel correspondant à la température* θ, en désignant par θ la température à l'instant t; l'origine des axes se trouve au centre de gravité, le plan local des yz se confond avec le feuillet moyen du tronçon, la perpendiculaire à ce feuillet mené par le centre de gravité est choisie comme axe des x.

Nous négligerons d'abord, pour simplifier notre étude, les actions extérieures directement appliquées aux bases du tronçon et à sa masse (y compris l'inertie dans le cas d'un équilibre dynamique); car celles-ci sont très faibles vis-à-vis des forces qui agissent sur le reste du corps et dont l'ensemble donne lieu aux réactions intérieures N, T.

En vertu de cette simplification et vu le système d'axes choisis, les équations indéfinies du problème seront :

$$(51)\quad \frac{dN_x}{dx}+\frac{dT_z}{dy}+\frac{dT_y}{dz}=0,\quad \frac{dT_z}{dx}+\frac{dN_y}{dy}+\frac{dT_x}{dz}=0,\quad \frac{dT_y}{dx}+\frac{dT_x}{dy}+\frac{dN_z}{dz}=0;$$

les équations définies, spéciales à chacune des deux bases du tronçon, étant

$$(52)\qquad N_x=0,\qquad T_z=0,\qquad T_y=0.$$

1° Envisageons le problème à une *première* approximation, c'est-à-dire, supposons qu'on ait

$$\frac{d(\partial, g)}{d(y, z)} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d(N, T)}{d(y, z)} = 0:$$

les équations indéfinies (51) se réduisent et deviennent respectivement

$$\frac{dN_x}{dx} = 0, \quad \frac{dT_z}{dx} = 0, \quad \frac{dT_y}{dx} = 0.$$

Ces dernières, combinées avec les équations aux limites (52), admettent les seules solutions $N_x = T_z = T_y = 0$.

Ainsi donc, *à une première approximation, deux feuillets contigus quelconques d'un tronçon de plaque n'exercent entre eux aucune action réciproque.*

2° Passons au cas d'une *seconde* approximation, c'est-à-dire faisons les hypothèses suivantes :

$$(53) \qquad \frac{d(g_y, g_z)}{d(y, z)} = 0, \qquad \frac{d^2(\partial_x, \partial_y, \partial_z, g_x)}{(dy^2, dy\,dz, dz^2)} = 0,$$

exprimant que les quantités $(\partial_x, \partial_y, \partial_z, g_x)$, au lieu de rester sensiblement les mêmes, *varient linéairement* d'un tronçon à l'autre, ce qui peut être regardé comme presque rigoureux. Chaque feuillet du tronçon étant d'ailleurs homogène dans toute son étendue, il en résulte, vu les formules (6), auxquelles satisfont les réactions intérieures N, T, lorsqu'il existe un plan de symétrie de contexture, que les relations (53) reviennent à poser

$$(54) \qquad \frac{d(T_y, T_z)}{d(y, z)} = 0, \qquad \frac{d^2(N_x, N_y, N_z, T_x)}{(dy^2, dy\,dz, dz^2)} = 0.$$

Dès lors, le système de valeurs vérifiant tant les équations indéfinies (51) que les conditions aux limites (52) sera

$$(55) \qquad N_x = 0, \qquad \frac{d(T_y, T_z)}{d(y, z)} = 0, \qquad \frac{d^2(N_y, N_z, T_x)}{(dy^2, dy\,dz, dz^2)} = 0.$$

Donc, *à une seconde approximation, l'action mutuelle de deux feuillets contigus de la plaque se réduit à ses deux composantes tangentielles* T_y, T_z, *ou n'a pas de composante normale sensible* N_x.

4. Ce qui précède nous permet de démontrer la *linéarité* des déformations ∂_y, ∂_z, g_x.

Admettons en effet le système d'égalités (53) qui traduisent les données du problème au second degré d'approximation; puis, dans les quatre équations de ce système, remplaçons g_y, g_z par leurs valeurs respectives $\frac{d\xi}{dz} + \frac{d\zeta}{dx}$, $\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}$. De là nous tirons aisément, en ajoutant les deux résultats qui renferment le terme $\frac{d^2\xi}{dydz}$, les trois relations suivantes :

$$(56) \qquad \frac{d\,\partial_y}{dx} = -\frac{d^2\xi}{dy^2}, \qquad \frac{d\,\partial_z}{dx} = -\frac{d^2\xi}{dz^2}, \qquad \frac{dg_x}{dx} = -2\frac{d^2\xi}{dy\,dz}.$$

Remarquons que les seconds membres de celles-ci sont *continus* quand x varie: car le déplacement ξ a d'égales valeurs pour deux feuillets contigus du tronçon, même hétérogènes, et par suite les *dérivées* de ces valeurs *en* y *et* z sont aussi égales. Si maintenant nous dérivons les équations (56) par rapport à x, nous constatons que les seconds membres ainsi différentiés donnent zéro pour résultat; car, d'après les égalités (53), on a $\frac{d^2\partial_x}{(dy^2,\, dydz,\, dz^2)} = 0$. Nous pouvons donc dans les équations (56) remplacer ξ par ξ_0, en appelant ξ_0 le déplacement transversal ξ pour le feuillet moyen. Désignons en outre par ∂_y^0, ∂_z^0, g_x^0, les valeurs des déformations ∂_y, ∂_z, g_x, sur le même feuillet; les équations (56) multipliées par dx, puis intégrées, donneront :

$$(57) \quad \partial_y = \partial_y^0 - x\frac{d^2\xi_0}{dy^2}, \qquad \partial_z = \partial_z^0 - x\frac{d^2\xi_0}{dz^2}, \qquad g_x = g_x^0 - 2x\frac{d^2\xi_0}{dy\,dz}.$$

Ainsi, *les déformations* ∂_y, ∂_z, g_x, *éprouvées par les feuillets dans les sens parallèles à leurs plans, varient linéairement le long d'une normale à la plaque.*

II. — Expressions des efforts tangentiels et tranchants, des couples de flexion et de torsion.

1. Nous avons vu qu'à une première et même à une seconde approximation on a $N_x = 0$; on sait, d'autre part, que si l'on admet, outre

l'existence d'un potentiel $\rho\Phi$, la symétrie de contexture relativement au plan yz, les tensions N_x, N_y, N_z, T_x sont les dérivées partielles, par rapport aux déformations simples correspondantes, d'une forme quadratique en ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_x.

Annulant N_x et portant la valeur de ∂_x, tirée de là, dans les expressions de N_y, N_z, T_x, on est amené aux relations suivantes, homogènes en ∂_y, ∂_z, g_x et dans lesquelles figurent seulement six coefficients distincts :

$$(58)\qquad \left\{\begin{aligned} N_y &= C(\gamma\partial_y + \varepsilon\partial_z + \varepsilon' g_x),\\ N_z &= C(\varepsilon\partial_y + \gamma'\partial_z + \varepsilon'' g_x),\\ T_x &= C(\varepsilon'\partial_y + \varepsilon''\partial_z + \gamma'' g_x) \quad (^1).\end{aligned}\right.$$

Nous supposerons que le coefficient positif d'élasticité C puisse *seul* varier d'un feuillet à l'autre, ou que les coefficients γ, γ', γ'', ε, ε', ε'' soient *indépendants de* x; cela revient à admettre que, pour d'égales déformations ∂_y, ∂_z, g_x, éprouvées par tous les feuillets (supposés isolés) dans leurs propres plans, les forces déformatrices N_y, N_z, T_x, conservent, chez tous, les mêmes rapports. Nous continuerons également à négliger l'influence de la température sur les coefficients d'élasticité.

Substituons, dans les expressions (58) de N_y, N_z, T_x, les valeurs de ∂_y, ∂_z, g_x définies par les équations (57), et posons, pour abréger :

$$(59)\qquad \left\{\begin{aligned} n_y^0 &= \gamma\partial_y^0 + \varepsilon\partial_z^0 + \varepsilon' g_x^0, & n_y &= \gamma\frac{d^2\xi_0}{dy^2} + \varepsilon\frac{d^2\xi_0}{dz^2} + 2\varepsilon'\frac{d^2\xi_0}{dy\,dz},\\ n_z^0 &= \varepsilon\partial_y^0 + \gamma'\partial_z^0 + \varepsilon'' g_x^0, & n_z &= \varepsilon\frac{d^2\xi_0}{dy^2} + \gamma'\frac{d^2\xi_0}{dz^2} + 2\varepsilon''\frac{d^2\xi_0}{dy\,dz},\\ t_x^0 &= \varepsilon'\partial_y^0 + \varepsilon''\partial_z^0 + \gamma'' g_x^0, & t_x &= \varepsilon'\frac{d^2\xi_0}{dy^2} + \varepsilon''\frac{d^2\xi_0}{dz^2} + 2\gamma''\frac{d^2\xi_0}{dy\,dz};\end{aligned}\right.$$

il viendra

$$(60)\qquad N_y = C(n_y^0 - x n_y), \qquad N_z = C(n_z^0 - x n_z), \qquad T_x = C(t_x^0 - x t_x).$$

Nous obtenons ainsi, sous une forme simple, l'expression des forces déformatrices N_y, N_z, T_x, en un point quelconque de la plaque.

---

(1) On reconnaît assez facilement l'égalité, deux à deux, des six coefficients $\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon', \varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon''$, après élimination de ∂_x, en raison de l'existence du potentiel $\rho\Phi$ et des égalités qu'elle entraînait dans les coefficients d'élasticité primitifs.

2. Cela posé, proposons-nous d'évaluer les actions totales exercées, par unité de longueur, à travers deux sections faites dans la plaque suivant deux surfaces matérielles qui, à l'état primitif, coïncident respectivement avec les plans des xz et des xy. Sur chaque élément plan de la bande des xz, il n'existe, du moins à une première approximation, que deux forces, l'une normale N_y, l'autre tangentielle T_x. Nous aurons donc, en effectuant la sommation des tensions normales N_y,

$$\int_h N_y\,dx = \int_h C(n_y^0 - x n_y)\,dx = n_y^0 \int_h C\,dx - n_y \int_h Cx\,dx,$$

h étant l'épaisseur de la plaque au point considéré.

Or la seconde partie de cette somme est nulle; car le feuillet moyen se confondant, à l'état primitif, avec le plan des yz, on a $\int_h Cx\,dx = 0$.

Par suite la réduction des forces N_y donnera lieu :

1° A une traction résultante, appliquée au centre de gravité de la bande et dirigée suivant Oy, qui aura pour expression

$$\mathfrak{N}_y = n_y^0 \int_h C\,dx = C' h n_y^0,$$

en appelant C' la valeur moyenne du coefficient d'élasticité C le long d'une perpendiculaire aux faces de la plaque;

2° A un couple, normal à l'axe des z, qui équivaut à l'ensemble des forces $-C n_y x\,dx$ et dont le moment, compté positivement en tournant de Oy vers Ox, sera

$$\nu_y = n_y \int_h Cx^2\,dx = \frac{C'' h^3}{12} n_y,$$

le coefficient C'' étant défini par l'égalité $\frac{C'' h^3}{12} = \int_h Cx^2\,dx$.

Un raisonnement analogue s'applique à la sommation des forces tangentielles T_x, qui donnent après réduction : 1° une traction résultante $\mathfrak{T}_x = C' h t_x^0$, appliquée au centre de gravité de la bande, mais ayant la direction Oz; 2° un couple normal à Oy et dont le moment, compté positivement en tournant de Oz vers Ox, sera $\tau_x = \frac{C'' h^3}{12} t_x$.

De même, les forces N_z, T_x, exercées sur la bande des xy, équivalent par unité de longueur : 1° à deux forces $\mathfrak{N}_z = C'hn_z^0$, $\mathfrak{T}_x = C'ht_x^0$, l'une normale, l'autre tangentielle, appliquées à son centre de gravité; 2° à deux couples $\nu_z = \frac{C''h^3}{12} n_z$, $\tau_x = \frac{C''h^3}{12} t_x$, qui se trouvent, le premier, normal à Oy, le second, normal à Oz.

5. Les résultantes $\mathfrak{N}_y$, $\mathfrak{N}_z$, $\mathfrak{T}_x$, dont les lignes d'action sont dans le plan des yz, c'est-à-dire dans le plan qui coïncide primitivement avec le feuillet moyen, sont appelées *efforts tangentiels;* elles provoquent les déformations ∂_x^0, ∂_y^0, g_z, éprouvées par le feuillet moyen du tronçon dans des sens parallèles à sa position primitive.

Les couples ν_y, ν_z perpendiculaires aux intersections respectives des deux bandes par le feuillet moyen, ont reçu le nom de *couples de flexion;* les deux autres, agissant dans le plan même des bandes et dont la valeur commune est sensiblement τ_x, celui de *couples de torsion*. Ces divers couples ont pour effet d'incurver le feuillet moyen, supposé primitivement plan, et les quantités $\frac{d^2\zeta_0}{(dy^2, dy\,dz, dz^2)}$ qui figurent dans l'expression de n_y, n_z, t_x, et par suite dans celle de ν_y, ν_z, τ_x, caractérisent la *courbure* prise, après déformation, par le feuillet moyen au point considéré.

La sommation des forces T_y, T_z, qui ne peuvent pas être négligées à une seconde approximation, introduit deux résultantes $\mathfrak{F}_y$, $\mathfrak{F}_z$, appelées *efforts tranchants* et dont les valeurs respectives, rapportées à l'unité de longueur des bandes, sont, pour la bande des xz, $\mathfrak{F}_y = \int_h T_z\,dx$; pour celle des xy, $\mathfrak{F}_z = \int_h T_y\,dx$.

III. — Équations de l'équilibre et du mouvement d'un tronçon de plaque dans le cas réel.

1. Pour arriver aux conclusions qui précèdent, nous avons dû supposer, d'une part, qu'à l'intérieur du tronçon considéré la constitution et l'état de la matière ne variaient pas, ou, du moins, ne variaient que linéairement le long d'une couche quelconque parallèle au feuillet moyen; d'autre part, que la masse et les bases du tronçon étaient libres

de toute action extérieure. Or, il est évident que, pratiquement, ces conditions ne sont jamais réalisées. Nous pourrons néanmoins appliquer à l'étude du cas réel les formules déjà obtenues, pourvu que l'épaisseur de la plaque soit une fraction assez petite de ses autres dimensions. En effet, à cause de la continuité, les expressions des forces et couples ($\mathcal{N}$, $\mathcal{C}$, ν, τ) ne pourront pas différer notablement de ce qu'elles étaient dans le cas idéal précédemment envisagé; de même, les efforts tranchants $\mathcal{F}_y$, $\mathcal{F}_z$, nuls à une première approximation, auront toujours des valeurs faibles, comparées à celles des forces ($\mathcal{N}$, $\mathcal{C}$) ou du moins à leurs composantes.

2. Limitons notre étude au cas d'une plaque primitivement plane et peu déformée; le feuillet moyen, dans son état d'équilibre primitif, étant choisi comme plan *général* des yz, construisons en un point dont les coordonnées *primitives* sont y, z, un prisme élémentaire ayant pour hauteur, l'épaisseur h de la plaque, et pour section normale, un rectangle infiniment petit $dy\,dz$ du feuillet moyen.

Les axes *locaux*, rapportés à l'*état primitif* du tronçon, c'est-à-dire à l'*état naturel correspondant à la température* θ, sont : Ox, la perpendiculaire au feuillet moyen; Oy et Oz, les deux fibres rectangulaires dy, dz, situées dans le même feuillet.

Après déformation, le point matériel (y, z) d'où partent les fibres dy, dz, a subi de petits déplacements ξ_0, η_0, ζ_0; par suite, les éléments rectilignes dy, dz auront pour projections respectives, sur les axes locaux de coordonnées, le premier, $\frac{d\xi_0}{dy}dy$, $\left(1+\frac{d\eta_0}{dy}\right)dy$, $\frac{d\zeta_0}{dy}dy$; le second, $\frac{d\xi_0}{dz}dz$, $\frac{d\eta_0}{dz}dz$, $\left(1+\frac{d\zeta_0}{dz}\right)dz$.

De là on déduit les cosinus directeurs des fibres qui, primitivement, se confondaient avec les axes locaux. Ces cosinus sont : pour l'élément dy, $\frac{d\xi_0}{dy}$, 1, $\frac{d\zeta_0}{dy}$; pour l'élément dz, $\frac{d\xi_0}{dz}$, $\frac{d\eta_0}{dz}$, 1; pour une perpendiculaire au feuillet moyen, 1, $-\frac{d\xi_0}{dy}$, $-\frac{d\xi_0}{dz}$.

3. Cela posé, passons en revue les forces qui agissent sur le filet de matière ainsi construit :

1° Les forces *extérieures*; si l'on désigne par ρ la densité au point considéré, par X, Y, Z, les composantes de l'action extérieure, rapportée à l'unité de masse, les forces extérieures appliquées au tronçon ont pour expressions $\rho h X\,dy\,dz$, $\rho h Y\,dy\,dz$, $\rho h Z\,dy\,dz$.

2° Les forces *intérieures* $(\mathfrak{N}, \mathfrak{C}, \mathfrak{T})$: pour la face $h\,dz$, les résultantes des actions déformatrices sont sensiblement $-\mathfrak{T}_y\,dz$, $-\mathfrak{N}_y\,dz$, $-\mathfrak{C}_x\,dz$; de même, pour la face $h\,dy$, elles sont $-\mathfrak{T}_z\,dy$, $-\mathfrak{C}_x\,dy$, $-\mathfrak{N}_z\,dy$. Quant aux forces $(\mathfrak{N}, \mathfrak{C}, \mathfrak{T})$ qui s'exercent sur les faces opposées aux précédentes, leurs expressions sont pareilles, mais changées de signe et augmentées de leurs différentielles par rapport à y ou par rapport à z.

Il est clair que le raisonnement, que nous venons de tenir pour les forces $(\mathfrak{N}, \mathfrak{C}, \mathfrak{T})$, s'étend naturellement aux couples (ν, τ), agissant sur les quatre faces du prisme.

Remarquons de suite que, dans l'application, qui sera faite ultérieurement, des théorèmes des quantités de mouvement et des moments par rapport aux axes locaux de coordonnées, il faudra multiplier les différentes expressions des $(\mathfrak{N}, \mathfrak{C}, \mathfrak{T}, \nu, \tau)$, par les petits cosinus $\frac{d\zeta_0}{dy}$, $\frac{d\zeta_0}{dy}$, ... et par leurs dérivées. Nous négligerons alors, devant les dérivées $\frac{d(\mathfrak{N}, \mathfrak{C}, \mathfrak{T}, \nu, \tau)}{d(y, z)}$, les produits, par ces petits cosinus et leurs dérivées, soit des forces $(\mathfrak{N}, \mathfrak{C})$ qui sont de l'ordre des petites déformations ∂_y^0, ∂_z^0, g_x^0, soit des couples (ν, τ) qui sont de l'ordre des faibles courbures $\frac{d^2\zeta_0}{(dy^2, dy\,dz, dz^2)}$. Nous pourrons opérer de même, et à fortiori, pour les produits des efforts tranchants $\mathfrak{T}_y$, $\mathfrak{T}_z$, par les mêmes quantités; car ceux-ci, nuls à une première approximation, seront toujours très inférieurs aux forces $(\mathfrak{N}, \mathfrak{C})$.

4. Appliquons au tronçon ou filet le théorème des quantités de mouvement, par rapport aux axes Oy, Oz, Ox; nous sommes conduits aux équations suivantes :

$$(61)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\mathfrak{N}_y}{dy} + \dfrac{d\mathfrak{C}_x}{dz} + \rho h Y = 0, \\[2mm] \dfrac{d\mathfrak{C}_x}{dy} + \dfrac{d\mathfrak{N}_z}{dz} + \rho h Z = 0; \end{cases}$$

$$(62)\qquad \frac{d}{dy}\left(\mathfrak{T}_y + \mathfrak{N}_y\frac{d\zeta_0}{dy} + \mathfrak{C}_x\frac{d\zeta_0}{dz}\right) + \frac{d}{dz}\left(\mathfrak{T}_z + \mathfrak{C}_x\frac{d\zeta_0}{dy} + \mathfrak{N}_z\frac{d\zeta_0}{dz}\right) + \rho h X = 0.$$

L'équation (62) développée peut s'écrire

$$(63)\qquad \left(\frac{d\mathcal{F}_y}{dy}+\frac{d\mathcal{F}_z}{dz}\right)+\left(\mathcal{N}_y\frac{d^2\zeta_0}{dy^2}+2\mathcal{T}_x\frac{d^2\zeta_0}{dy\,dz}+\mathcal{N}_z\frac{d^2\zeta_0}{dz^2}\right)$$
$$+\frac{d\zeta_0}{dy}\left(\frac{d\mathcal{N}_y}{dy}+\frac{d\mathcal{T}_x}{dz}\right)+\frac{d\zeta_0}{dz}\left(\frac{d\mathcal{T}_x}{dy}+\frac{d\mathcal{N}_z}{dz}\right)+\rho h\mathrm{X}=0.$$

Remplaçant $\left(\frac{d\mathcal{N}_y}{dy}+\frac{d\mathcal{T}_x}{dz}\right)$, $\left(\frac{d\mathcal{T}_x}{dy}+\frac{d\mathcal{N}_z}{dz}\right)$, par les valeurs $-\rho h\mathrm{Y}$, $-\rho h\mathrm{Z}$, tirées de (61), nous introduirons dans l'équation précédente la somme suivante $\rho h\left(\mathrm{X}-\mathrm{Y}\frac{d\zeta_0}{dy}-\mathrm{Z}\frac{d\zeta_0}{dz}\right)$, qui représente la projection totale, sur la normale au feuillet moyen, de l'action extérieure rapportée à l'unité de surface de celui-ci; or, cette somme pouvant être généralement confondue avec $\rho h\mathrm{X}$, l'équation (63) deviendra

$$(64)\qquad \left(\frac{d\mathcal{F}_y}{dy}+\frac{d\mathcal{F}_z}{dz}\right)+\left(\mathcal{N}_y\frac{d^2\zeta_0}{dy^2}+2\mathcal{T}_x\frac{d^2\zeta_0}{dy\,dz}+\mathcal{N}_z\frac{d^2\zeta_0}{dz^2}\right)+\rho h\mathrm{X}=0.$$

5. Il reste, pour déterminer $\mathcal{F}_y$, $\mathcal{F}_z$, à appliquer aux forces et aux couples qui sollicitent le tronçon, le théorème des moments par rapport aux axes Oy et Oz.

A une première approximation, nous pouvons ici faire abstraction :

1° Des actions extérieures exercées sur le filet; celles-ci, en effet, n'auront que leurs composantes parallèles au feuillet moyen, dont les bras de levier soient sensibles, et ces composantes, en tout de l'ordre du produit $dy\,dz$, ne donneront que des moments totaux négligeables si elles se trouvent distribuées à peu près pareillement de part et d'autre du feuillet moyen;

2° Des tensions déformatrices ($\mathcal{N}$, $\mathcal{T}$); car celles-ci, d'une part, étant pour chaque face de l'ordre de dy ou de dz, d'autre part, étant tangentes au feuillet moyen, et, par suite, passant à des distances infiniment petites du second ordre, sinon même nulles, des axes Oy et Oz, ne sont pas susceptibles de donner lieu à des moments appréciables.

Seuls doivent donc entrer en ligne de compte les couples (ν, τ), et leurs différentielles en y et z, ainsi que les efforts tranchants $\mathcal{F}_y$, $\mathcal{F}_z$.

Dès lors, par l'application du théorème des moments relativement aux axes Oy et Oz, nous obtenons les équations qui déterminent $\mathcal{F}_y$ et $\mathcal{F}_z$:

$$(65)\qquad \mathcal{F}_z=-\left(\frac{d\tau_x}{dy}+\frac{d\nu_z}{dz}\right),\qquad \mathcal{F}_y=-\left(\frac{d\nu_y}{dy}+\frac{d\tau_x}{dz}\right).$$

En substituant dans l'équation (64) les valeurs trouvées pour $\mathcal{F}_z$ et $\mathcal{F}_y$, cette dernière s'écrit

$$(66) \qquad -\left(\frac{d^2 \nu_y}{dy^2} + 2\frac{d^2 \tau_x}{dy\,dz} + \frac{d^2 \nu_z}{dz^2}\right) + \left(\mathfrak{N}_y \frac{d^2 \xi_0}{dy^2} + 2\mathfrak{C}_x \frac{d^2 \xi_0}{dy\,dz} + \mathfrak{N}_z \frac{d^2 \xi_0}{dz^2}\right) + \rho h X = 0.$$

6. Les équations (61) et (66) conviennent à l'*équilibre* d'un tronçon de plaque. Les deux égalités (61), dans lesquelles on portera les valeurs de $\mathfrak{N}_y$, $\mathfrak{N}_z$, $\mathfrak{C}_x$, connues en fonction de n_y^0, n_z^0, t_x^0, ou encore, eu égard aux formules (59), en fonction de $\partial_y^0 = \frac{d\eta_0}{dy}$, $\partial_z^0 = \frac{d\zeta_0}{dz}$, $g_x^0 = \frac{d\eta_0}{dz} + \frac{d\zeta_0}{dy}$, régissent l'équilibre d'*extension* ou de *contraction* de la plaque; elles permettent de calculer les déplacements η_0, ζ_0, éprouvés par le feuillet moyen dans les sens des coordonnées, y, z, parallèles à son plan primitif.

La relation (66), dans laquelle les (ν, τ) auront été également remplacés par leurs valeurs en fonction de n_y, n_z, t_x, ou de $\frac{d^2\xi_0}{(dy^2, dy\,dz, dz^2)}$, fera connaître la *courbure* prise, après déformation, par le feuillet moyen de la plaque au point considéré.

Remarquons en outre que si, dans les équations précitées, on vient à introduire les composantes de la *force d'inertie*, on obtiendra les équations du mouvement, soit *tangentiel*, soit *transversal*, des plaques.

IV. — Introduction de la température θ dans les équations.

1. Pour des raisons identiques à celles données antérieurement, lorsqu'il s'agissait d'un tronçon de tige (*voir* première Partie, § VI, n° **1**), nous prendrons, comme terme de comparaison, l'*état naturel relatif à la température spéciale* $\theta = 0$. Or, on connaît, par les égalités (28), les relations qui existent entre les déformations (∂', g') comptées à partir de l'*état naturel relatif à la température* $\theta = 0$, les déformations (∂, g) comptées à partir de l'*état naturel correspondant à une température* θ *quelconque*, et les déformations *purement thermiques* qui sont ici simplement, dans l'hypothèse d'un plan de symétrie de contexture, $(D_x, D_y, D_z, G_x)\,\theta$.

On a vu d'autre part, également à propos des tiges, que, *si l'on admet à toute température* θ *un état naturel ou sans tension pour l'ensemble du tronçon*, ce que nous supposons ici, les déformations purement thermiques doivent satisfaire aux conditions (29). Celles-ci, dans le cas d'une première approximation, donnent

$$\frac{d^2 D_y}{dx^2} = 0, \qquad \frac{d^2 D_z}{dx^2} = 0, \qquad \frac{d^2 G_x}{dx^2} = 0.$$

De là il résulte que, le coefficient D_x, n'ayant aucune relation à vérifier, pourra varier, d'une manière quelconque, en passant d'une couche parallèle à la suivante; au contraire, les coefficients D_y, D_z, G_x seront, au plus, des *fonctions linéaires* de la petite coordonnée transversale x, c'est-à-dire que leur expression la plus générale sera

$$(67) \qquad D_y = D_y^0 - \mathfrak{S} x, \qquad D_z = D_z^0 - \mathfrak{S}' x, \qquad G_x = G_x^0 - 2\mathfrak{S}'' x.$$

Les coefficients D_y^0, D_z^0, G_x^0 se rapportent au feuillet moyen; quant aux facteurs $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}''$, ils seront *constants* pour un *même* tronçon, mais varieront généralement d'un tronçon à l'autre.

Remarquons que, pour toutes les valeurs de D_y, D_z, G_x, autres que celles définies par les équations (67), il existera bien à la température θ un état naturel ou sans tension pour chaque particule imperceptible du tronçon, prise isolément et supposée soustraite à toute pression; mais cet état naturel ne sera pas réalisé dans l'ensemble du tronçon, autrement dit, toutes ces particules, après avoir éprouvé chacune ses dilatations thermiques, ne pourront pas reconstituer le tronçon *continu* par simple soudure ou sans faire naître des réactions intérieures.

2. Les déplacements et les déformations étant maintenant comptés à partir de l'*état naturel relatif à la température spéciale* $\theta = 0$, il reste à voir comment la température figure dans l'expression des efforts tangentiels, des couples de flexion et de torsion, des efforts tranchants.

1° *Efforts tangentiels.* — Ils sont donnés par les formules suivantes :

$$\mathfrak{N}_y = C' h n_y^0, \qquad \mathfrak{N}_z = C' h n_z^0, \qquad \mathfrak{T}_x = C' h t_x^0.$$

Le premier groupe des équations (59) détermine les quantités n_y^0, n_z^0, t_x^0. Dès lors, si nous y remplaçons les (∂^0, g^0) par leurs valeurs connues en fonction des (∂'^0, g'^0) et des $(D^0, G^0)\theta$, nous obtiendrons une première série de coefficients $n_y'^0$, $n_z'^0$, $t_x'^0$, qui se déduisent des expressions de n_y^0, n_z^0, t_x^0, en substituant aux (∂^0, g^0) les (∂'^0, g'^0) et de même une seconde série de coefficients $n_y''^0$, $n_z''^0$, $t_x''^0$, qui seront le résultat de la substitution des (D^0, G^0) aux (∂^0, g^0). En définitive, nous pourrons écrire :

$$(68)\qquad \mathfrak{N}_y = C'h(n_y'^0 - n_y''^0\theta), \quad \mathfrak{N}_z = C'h(n_z'^0 - n_z''^0\theta), \quad \mathfrak{T}_x = C'h(t_x'^0 - t_x''^0\theta).$$

Les efforts tangentiels $(\mathfrak{N}, \mathfrak{T})$ dépendent donc *linéairement* de la température, du moins, pour des écarts modérés de θ.

2° *Couples de flexion et de torsion.* — Les relations (57) qui démontrent la linéarité des déformations ∂_y, ∂_z, g_x, ont été établies, en admettant la *graduelle* variation des déformations dans les sens *parallèles au feuillet moyen* de la plaque. Or, il est clair que ce principe, d'après lequel les déformations varient, en général, incomparablement plus vite dans les sens transversaux que dans les sens tangentiels, s'applique tant aux déformations complètes ou *comptées à partir de l'état naturel relatif à la température spéciale* $\theta = 0$, qu'à celles qui sont *purement mécaniques*. Par conséquent, nous pourrons écrire, en introduisant les déplacements ξ', η', ζ', comptés à partir du *même état primitif* $\theta = 0$,

$$\partial_y' = \partial_y'^0 - x\frac{d^2\xi_0'}{dy^2}, \qquad \partial_z' = \partial_z'^0 - x\frac{d^2\xi_0'}{dz^2}, \qquad g_x' = g_x'^0 - 2x\frac{d^2\xi_0'}{dy\,dz}.$$

Occupons-nous de l'une de ces formules, la première, par exemple. On sait, vu les relations (28), que $\partial_y = \partial_y' - D_y\theta$; on aura, par suite,

$$\partial_y = \partial_y'^0 - D_y\theta - x\frac{d^2\xi_0'}{dy^2}.$$

Or, en vertu des égalités (67), on a $D_y = D_y^0 - \mathfrak{S}x$; il vient donc pour ∂_y :

$$\partial_y = (\partial_y'^0 - D_y^0\theta) - x\left(\frac{d^2\xi_0'}{dy^2} - \mathfrak{S}\theta\right).$$

Par identification de cette dernière relation avec la première du système (57), qui définit précisément ∂, on est amené à conclure que

$$\frac{d^2\zeta_0}{dy^2} = \frac{d^2\zeta_0'}{dy^2} - \varpi\theta.$$

Un raisonnement identique établirait que

$$\frac{d^2\zeta_0}{dz^2} = \frac{d^2\zeta_0'}{dz^2} - \varpi'\theta, \qquad \frac{d^2\zeta_0}{dy\,dz} = \frac{d^2\zeta_0'}{dy\,dz} - \varpi''\theta.$$

Cela posé, puisque les couples de flexion et de torsion ν_y, ν_z, τ_x sont des fonctions *linéaires et homogènes* des dérivées secondes $\dfrac{d^2\zeta_0}{(dy^2, dy\,dz, dz^2)}$, il est facile de se rendre compte qu'en remplaçant ces dérivées par les valeurs trouvées, on obtiendra, pour définir les couples (ν, τ), les formules suivantes :

$$(69) \quad \nu_y = \frac{C''h^3}{12}(n_y' - n_y''\theta), \qquad \nu_z = \frac{C''h^3}{12}(n_z' - n_z''\theta), \qquad \tau_x = \frac{C''h^3}{12}(t_x' - t_x''\theta).$$

Dans ces formules, les coefficients n_y', n_z', t_x', et de même les suivants n_y'', n_z'', t_x'', se déduisent de l'expression des coefficients correspondants n_y, n_z, t_x, déterminés par le second groupe d'égalités du système (59), les premiers, en remplaçant ζ_0 par ζ_0', les seconds, en remplaçant les dérivées secondes $\dfrac{d^2\zeta_0}{(dy^2, dz^2, dy\,dz)}$ par ϖ, ϖ', ϖ''.

Nous voyons donc que si ϖ, ϖ', ϖ'' sont *nuls* (c'est le cas de l'*homogénéité thermique* des couches primitivement parallèles au feuillet moyen), les facteurs n_y'', n_z'', t_x'' sont nuls également et par suite la température *n'influe pas* sur les couples de flexion et de torsion.

Au contraire, si ϖ, ϖ', ϖ'' sont *différents de zéro*, ce qui revient à supposer que les coefficients de dilatation thermique des couches considérées *varient* dans le sens de l'épaisseur de la plaque, les facteurs n_y'', n_z'', t_x'' n'étant pas nuls, la température *intervient* dans l'expression des couples et la modifie *proportionnellement* à l'écart θ.

3° *Efforts tranchants.* — Les efforts tranchants $\mathfrak{F}_y$, $\mathfrak{F}_z$, nuls dans le mode de *déformation type*, ont, dans les modes *réels*, leurs petites valeurs liées aux couples (ν, τ) par les égalités (65). Donc ils dépendent de la température dans la mesure où ces couples eux-mêmes en dépendront.

3. Essayons de mettre en évidence le rôle joué par la température dans le mouvement, soit tangentiel, soit transversal, des plaques.

1° *Mouvement tangentiel.* — Les équations (61) dans lesquelles on aura introduit les composantes, suivant les y et les z, de la force d'inertie régissent le mouvement tangentiel des plaques. Il suffit d'y remplacer $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$, $\mathfrak{T}_x$, par leurs valeurs tirées des formules (68) pour constater immédiatement que le mouvement *tangentiel* est *fonction de la température* θ.

2° *Mouvement transversal.* — De même, en introduisant dans l'équation (66) la composante, suivant les x, de la force d'inertie, on obtient la loi qui régit les vibrations transversales. L'équation (66), ainsi complète, se simplifie même, du moins lorsque les plaques considérées ont une certaine épaisseur; car alors les produits de $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$, $\mathfrak{T}_x$, par les dérivées secondes de ξ_0, sont insensibles et il reste

$$(70)\qquad \left(\frac{d^2\nu_y}{dy^2}+2\frac{d^2\tau_x}{dy\,dz}+\frac{d^2\nu_z}{dz^2}\right)-\rho h\left(X-\frac{d^2\xi_0}{dt^2}\right)=0.$$

Cette dernière équation nous apprend que, si les couples de flexion et de torsion (ν, τ) *ne dépendent pas* de la température (c'est le cas de l'*homogénéité thermique* des couches primitivement parallèles au feuillet moyen), celle-ci *n'influe pas* sur le mouvement transversal. Le contraire a lieu lorsque les couples considérés sont *fonction de* θ.

V. — Équations du mouvement des plaques homogènes et isotropes.

1. Voyons ce que deviennent, dans le cas présent, les coefficients C, γ, γ', γ'', ε, ε', ε'' des égalités (58) qui définissent les réactions intérieures N_y, N_z, T_x.

Partant des expressions bien connues des six tensions déformatrices (N, T), dans le cas d'un milieu *homogène et isotrope*, il suffit d'annuler N_x, d'en tirer la valeur de ∂_x en fonction de ∂_y, ∂_z, puis de transporter celle-ci dans les expressions de N_y, N_z. En procédant par identification, on trouvera, pour les coefficients mentionnés, les valeurs suivantes : $C=1$, $\gamma=\gamma'=\mu\,\dfrac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}$, $\gamma''=\mu$, $\varepsilon=\dfrac{2\mu\lambda}{\lambda+2\mu}$, $\varepsilon'=\varepsilon''=0$.

Ensuite, vu l'homogénéité de la plaque, on a $C = C' = C'' = 1$, $\mathcal{E} = \mathcal{E}' = \mathcal{E}'' = 0$; et d'autre part, en vertu de son isotropie, nous aurons $D_y = D_z = D$, $G_x = 0$.

Il viendra donc finalement, comme expression des forces ($\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}$) et des couples (ν, τ), en posant, pour abréger, $\frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} = a$:

$$(^1)\quad \mathfrak{N}_y = h\mu[a(\partial_y + \partial_z) - 2\partial_z - 2(a-1)D\theta],$$
$$\mathfrak{N}_z = h\mu[a(\partial_y + \partial_z) - 2\partial_y - 2(a-1)D\theta], \qquad \mathfrak{T}_x = h\mu g_x;$$
$$\nu_y = \frac{h^3}{12}\mu\left(a\,\Delta\xi - 2\frac{d^2\xi}{dz^2}\right), \qquad \nu_z = \frac{h^3}{12}\mu\left(a\,\Delta\xi - 2\frac{d^2\xi}{dy^2}\right), \qquad \tau_x = \frac{h^3}{6}\mu\frac{d^2\xi}{dy\,dz},$$

où Δ désigne le symbole opératoire $\frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$.

2. On peut dès lors former des équations *indéfinies* du mouvement :

1° Celles du mouvement *tangentiel*, en portant les valeurs de $\mathfrak{N}_y$, $\mathfrak{N}_z$, $\mathfrak{T}_x$ dans les équations (61), ce qui donne

$$(71)\quad \begin{cases} \mu\left[\Delta\eta + (a-1)\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{d\eta}{dy} + \dfrac{d\zeta}{dz} - 2D\theta\right)\right] + \rho\left(Y - \dfrac{d^2\eta}{dt^2}\right) = 0, \\ \mu\left[\Delta\zeta + (a-1)\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{d\eta}{dy} + \dfrac{d\zeta}{dz} - 2D\theta\right)\right] + \rho\left(Z - \dfrac{d^2\zeta}{dt^2}\right) = 0; \end{cases}$$

2° Celles du *mouvement transversal*, en portant les valeurs de ν_y, ν_z, τ_x dans l'équation (70); d'où il vient

$$(72)\qquad \mu a\frac{h^2}{12}\Delta(\Delta\xi) - \rho\left(X - \frac{d^2\xi}{dt^2}\right) = 0.$$

3. Cherchons les conditions *définies aux limites*, correspondantes, en supposant que les seules pressions extérieures qui s'exercent sur la plaque sont des pressions appliquées exclusivement sur ses bords. Ces conditions, spéciales au contour, sont au nombre de quatre et reviennent à dire que l'action totale extérieure, exercée sur une bande du cylindre contournant la plaque, comprise entre deux génératrices infiniment voisines, équivaut statiquement à trois forces dirigées

---

(1) Jusqu'ici nous avions affecté de l'indice o tout ce qui se rapportait au feuillet moyen; comme aucune confusion n'est possible, nous le supprimerons dorénavant.

suivant les axes locaux et à un couple perpendiculaire au contour. En effet, menons, par un point quelconque de l'une des génératrices considérées, trois axes rectangulaires tels que le premier soit normal au cylindre et le second dans le sens de la largeur ds de la bande; et prenons les composantes totales et les moments totaux, par rapport à ces axes, des forces extérieures appliquées à la bande. Le dernier des trois moments est de l'ordre de ds^2, c'est-à-dire négligeable; par suite, ces forces équivalent statiquement à trois composantes $P_n\,ds$, $P_s\,ds$, $P_x\,ds$, appliquées respectivement le long des trois axes, à un couple $M_s\,ds$ normal à l'élément ds du contour de la plaque, et à un second couple, $-M_n\,ds$. Ce dernier, résultant de forces tangentielles parallèles à ds, peut être remplacé statiquement par un couple formé de deux forces normales au feuillet moyen de la plaque et agissant aux extrémités du bras de levier ds. Ces deux forces, au commencement et à l'extrémité de ds, seront M_n et $-M_n$; sur l'élément ds qui suit, ces deux forces seront remplacées par $M_n+\frac{dM_n}{ds}\,ds$ et $-M_n-\frac{dM_n}{ds}\,ds$. Donc au point de séparation des deux éléments ds, on a les deux forces $-M_n$ et $M_n+\frac{dM_n}{ds}\,ds$ qui, à cause de la solidarité des bandes, se fondent en une résultante égale à $\frac{dM_n}{ds}\,ds$. Cette résultante se joint à la force $P_x\,ds$ qui est de même sens, et de la sorte l'action totale, exercée sur une bande du cylindre contournant, sera bien réduite statiquement, par unité de longueur du contour, aux trois composantes P_n, P_s, $P_x+\frac{dM_n}{ds}$ et au couple M_s, normal au contour.

Cela posé, appelons, par unité de surface, p_y, p_z, p_x, les composantes de l'action extérieure exercée sur un élément du contour et p_n, p_s, les composantes de la même action suivant la normale et la tangente au contour. Soit α l'angle de la normale extérieure avec Oy; des formules connues de la théorie de l'élasticité donnent

$$p_y=N_y\cos\alpha+T_x\sin\alpha,\qquad p_z=T_x\cos\alpha+N_z\sin\alpha,\qquad p_x=T_z\cos\alpha+T_y\sin\alpha,$$

et il est d'ailleurs aisé de voir que

$$p_n=p_y\cos\alpha+p_z\sin\alpha=N_y\cos^2\alpha+N_z\sin^2\alpha+2T_x\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$p_s=-p_y\sin\alpha+p_z\cos\alpha=-(N_y-N_z)\sin\alpha\cos\alpha+T_x(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha).$$

De là on déduit

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}_n &= \int_h p_n\,dx = \mathcal{N}_y \cos^2\alpha + \mathcal{N}_z \sin^2\alpha + 2\,\mathcal{T}_x \sin\alpha\cos\alpha,\\
\mathrm{P}_s &= \int_h p_s\,dx = -(\mathcal{N}_y - \mathcal{N}_z)\sin\alpha\cos\alpha + \mathcal{T}_x(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha),\\
\mathrm{P}_x &= \int_h p_x\,dx = \mathcal{F}_y\cos\alpha + \mathcal{F}_z\sin\alpha = -\left[\left(\frac{d\nu_y}{dy} + \frac{d\tau_x}{dz}\right)\cos\alpha + \left(\frac{d\tau_x}{dy} + \frac{d\nu_z}{dz}\right)\sin\alpha\right],\\
\mathrm{M}_n &= \int_h p_s x\,dx = -[-(\nu_y - \nu_z)\sin\alpha\cos\alpha + \tau_x(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)],\\
\mathrm{M}_s &= \int_h p_n x\,dx = -(\nu_y\cos^2\alpha + \nu_z\sin^2\alpha + 2\,\tau_x\cos\alpha\sin\alpha).
\end{aligned}
$$

Par substitution des valeurs trouvées pour $\mathcal{N}_y$, $\mathcal{N}_z$, $\mathcal{T}_x$, ν_y, ν_z, τ_x, il vient

$$
(73)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{P}_n &= h\mu\Big[\sin 2\alpha\left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\right) + \cos 2\alpha\left(\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\zeta}{dz}\right)\\
&\qquad\qquad + (a-1)\left(\frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} - 2\mathrm{D}\theta\right)\Big],\\
\mathrm{P}_s &= h\mu\left[2\cos 2\alpha\left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\right) - \sin 2\alpha\left(\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\zeta}{dz}\right)\right];
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\mathrm{P}_x = -\frac{h^3\mu}{12}\,a\,\frac{d}{dn}(\Delta\xi),
$$

$$
\mathrm{M}_n = -\frac{h^3\mu}{12}\left[\sin 2\alpha\left(\frac{d^2\xi}{dy^2} - \frac{d^2\xi}{dz^2}\right) - 2\cos 2\alpha\,\frac{d^2\xi}{dy\,dz}\right];
$$

$$
(74)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{M}_s &= -\frac{h^3\mu}{12}\left[\cos 2\alpha\left(\frac{d^2\xi}{dy^2} - \frac{d^2\xi}{dz^2}\right) + \sin 2\alpha\,\frac{d^2\xi}{dy\,dz} + \frac{a-1}{2}\,\Delta\xi\right],\\
\mathrm{P}_x + \frac{d\mathrm{M}_n}{ds} &= -\frac{h^3\mu}{12}\left\{\frac{d}{ds}\Big[\sin 2\alpha\left(\frac{d^2\xi}{dy^2} - \frac{d^2\xi}{dz^2}\right)\right.\\
&\qquad\qquad \left. - 2\cos 2\alpha\,\frac{d^2\xi}{dy\,dz}\Big] + a\,\frac{d}{dn}(\Delta\xi)\right\}.
\end{aligned}
\right.
$$

4. Il suffit maintenant de joindre aux deux équations (71) les expressions (73) de P_n et de P_s, ces forces étant des fonctions données sur le contour, pour obtenir le système qui détermine le mouvement tangentiel; et, de même, de joindre à l'équation indéfinie (72) les expressions (74) également données de M_s et de $P_x + \frac{dM_n}{ds}$, pour obtenir le système qui détermine le mouvement transversal. On constate alors aisément que la température θ figure dans les équations du premier système : qu'elle ne paraît pas, au contraire, dans celles du second : et, par suite, nous sommes amenés à conclure que, pour ce qui est des plaques *homogènes et isotropes*, le mouvement *tangentiel* est *fonction de la température*, celle-ci *n'influant pas* sur le mouvement *transversal* au degré d'approximation auquel nous nous sommes bornés.

Contribution à l'optique cristalline;

PAR M. J. BOUSSINESQ.

Sommaire. — I. Construction nouvelle de la direction des vibrations, de celle du rayon lumineux et de la vitesse de ce rayon, pour chacun des deux systèmes d'ondes planes de direction donnée, propagés dans un cristal transparent. — II. De l'absorption par les cristaux *translucides;* équations fondamentales. — III. Ondes planes latéralement indéfinies, dans un cristal translucide. — IV. Ondes planes latéralement limitées, dans le même cristal translucide. — V. *Ellipsoïde d'absorption:* formes simples du *coefficient d'extinction* de la lumière dans le cristal. — VI. Réflexions sur la grandeur relative des longueurs d'onde que supposent nos équations du mouvement de l'éther dans les corps.

I. — Construction nouvelle de la direction des vibrations, de celle du rayon lumineux et de la vitesse de ce rayon, pour chacun des deux systèmes d'ondes planes de direction donnée, propagés dans un cristal transparent.

1. On admet généralement que tout cristal transparent possède un système d'axes rectangulaires, par rapport auquel les équations du mouvement vibratoire de son éther se réduisent à la forme simple

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\xi}{a^2}, \frac{\eta}{b^2}, \frac{\zeta}{c^2}\right) = \Delta_2(\xi, \eta, \zeta) - \frac{d\theta}{d(x, y, z)}, \tag{1}$$

où ξ, η, ζ désignent les trois composantes, suivant les x, y, z, du déplacement élastique, a, b, c trois certaines vitesses constantes de propagation, caractéristiques du cristal (et dont les rapports mutuels ne sont jamais, pratiquement, très différents de l'unité), Δ_2 le symbole opératoire $\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$, enfin, θ, la dilatation cubique $\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}$.

Or il résulte de ces équations, pour régir les ondes planes susceptibles de se propager à l'intérieur du cristal et normales à la direction de cosinus directeurs donnés α, β, γ, suivant laquelle progressent les ondes (quand elles sont latéralement indéfinies) : 1° l'équation de Fresnel aux vitesses ω de propagation de ces ondes,

$$\frac{\alpha^2}{\omega^2 - a^2} + \frac{\beta^2}{\omega^2 - b^2} + \frac{\gamma^2}{\omega^2 - c^2} = 0; \tag{2}$$

2° la double proportion suivante, définissant les cosinus directeurs l', m', n' de la vibration, que nous conviendrons de compter positivement quand elle se fera suivant le sens dont l'angle avec la normale (α, β, γ) est aigu,

$$\frac{l'}{\dfrac{a^2\alpha}{\omega^2 - a^2}} = \frac{m'}{\dfrac{b^2\beta}{\omega^2 - b^2}} = \frac{n'}{\dfrac{c^2\gamma}{\omega^2 - c^2}}. \tag{3}$$

2. Cette double proportion entraîne, pour les cosinus directeurs l_1, m_1, n_1 de la projection de la vibration sur le plan de l'onde, projection qu'on peut choisir pour définir le *plan de la vibration* (ou plan normal à l'onde et contenant la vibration), la double proportion, un peu plus simple,

$$\frac{l_1}{\dfrac{\alpha}{\omega^2 - a^2}} = \frac{m_1}{\dfrac{\beta}{\omega^2 - b^2}} = \frac{n_1}{\dfrac{\gamma}{\omega^2 - c^2}}. \tag{4}$$

Nous appellerons, pour abréger, *pseudo-vibration* (ou vibration de Fresnel) cette projection de la vibration vraie sur le plan de l'onde, et ε son écart angulaire (toujours petit en réalité) avec elle (l', m', n'). Cet écart ε sera donc l'angle aigu de la direction (l_1, m_1, n_1) avec la direction précédente (l', m', n'), qui lui est évidemment reliée par les rapports égaux

$$\frac{l'}{a^2 l_1} = \frac{m'}{b^2 m_1} = \frac{n'}{c^2 n_1}. \tag{5}$$

Il est le complément de l'angle des deux directions (α, β, γ) et (l', m', n'); en sorte qu'on a

$$\sin\varepsilon = \alpha l' + \beta m' + \gamma n'. \tag{6}$$

D'antre part, il suit, vu l'équation (2), des doubles proportions (4) et (5), la relation

$$\frac{\alpha}{a^2}l' + \frac{\beta}{b^2}m' + \frac{\gamma}{c^2}n' = 0. \tag{7}$$

qui prouve la perpendicularité de la vibration (l', m', n') à la droite émanée de l'origine et dont les cosinus directeurs α_1, β_1, γ_1 seraient proportionnels aux trois quotients $\frac{\alpha}{a^2}$, $\frac{\beta}{b^2}$, $\frac{\gamma}{c^2}$. Comme, dans la réalité, les rapports mutuels de ces trois quotients ne seront jamais très différents de ceux de α, β, γ, cette droite, parfaitement déterminée dès que la normale (α, β, γ) l'est elle-même, n'en diffère pas beaucoup et peut être appelée la *pseudo-normale* aux ondes. La vibration (l', m', n') est, en quelque sorte, par rapport à elle, *rigoureusement transversale*, tandis qu'elle est seulement *quasi-transversale* par rapport à la normale vraie (α, β, γ). Et l'on remarquera que les cosinus directeurs de celle-ci sont reliés aux siens α_1, β_1, γ_1 par la double proportion

$$\frac{\alpha}{a^2\alpha_1} = \frac{\beta}{b^2\beta_1} = \frac{\gamma}{c^2\gamma_1}, \tag{8}$$

entièrement analogue à (5).

3. Enfin, quand les ondes planes ne sont pas latéralement indéfinies, mais que, toutefois, l'amplitude varie, à chaque instant, assez graduellement d'un point à l'autre du premier plan d'onde (censé mené par l'origine) pour éviter les phénomènes de diffraction, la transmission intégrale du mouvement se fait, sur chaque onde, dans le sens du rayon r, émané de l'origine, dont l'extrémité (x, y, z) est située sur l'onde plane

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \omega, \tag{9}$$

partie de l'origine depuis une unité de temps ou ayant parcouru la distance ω suivant la normale (α, β, γ), et a, de plus, ses trois coordonnées x, y, z astreintes à vérifier la double proportion

$$\frac{x}{\alpha - l'\sin\varepsilon} = \frac{y}{\beta - m'\sin\varepsilon} = \frac{z}{\gamma - n'\sin\varepsilon}. \tag{10}$$

Or il résulte de celle-ci (10) et de la relation (6) que ce rayon r se trouve à la fois perpendiculaire à la vibration (l', m', n') et situé *dans le plan de celle-ci*; en sorte que, dans ce plan d'ailleurs normal à l'onde, il fait lui-même l'angle ε avec la perpendiculaire ω menée de l'origine sur l'onde (9). Par conséquent, la perpendiculaire ω est la projection, sous l'angle ε, du rayon r, et l'on a

$$\omega = r\cos\varepsilon \quad (11)$$ (1).

4. Cela posé, élevons au carré les trois rapports (4), et, les multipliant ensuite, haut et bas, par $\omega^2 - a^2$, $\omega^2 - b^2$, $\omega^2 - c^2$, ajoutons-les terme à terme en tenant compte, au dénominateur, de l'équation (2) en ω. Il viendra, comme on sait, pour évaluer le carré de cette vitesse ω de progression des ondes en fonction linéaire des trois carrés $l_1'^2$, $m_1'^2$, $n_1'^2$ des cosinus directeurs de la pseudo-vibration, la formule simple

$$\omega^2 = a^2 l_1'^2 + b^2 m_1'^2 + c^2 n_1'^2. \quad (12)$$

Mais la vraie vitesse de propagation du mouvement doit se mesurer suivant le sens où il se transmet; et elle se trouve exprimée par le rayon r, dont l'inverse, élevé au carré, a, d'après (11), la valeur $\frac{\cos^2\varepsilon}{\omega^2}$. On l'obtiendra donc en évaluant le cosinus de l'angle ε des deux directions (l_1', m_1', n_1') et (l', m', n'). Or les formules (5) reviennent à prendre

$$(l', m', n') = \frac{(a^2 l_1', b^2 m_1', c^2 n_1')}{\sqrt{a^4 l_1'^2 + b^4 m_1'^2 + c^4 n_1'^2}},$$

et, par suite,

$$\cos^2\varepsilon = \frac{(a^2 l_1'^2 + b^2 m_1'^2 + c^2 n_1'^2)^2}{a^4 l_1'^2 + b^4 m_1'^2 + c^4 n_1'^2}.$$

L'inverse du carré r^2 de la vraie vitesse de propagation est donc, vu (12),

$$\frac{1}{r^2} = \frac{a^2 l_1'^2 + b^2 m_1'^2 + c^2 n_1'^2}{a^4 l_1'^2 + b^4 m_1'^2 + c^4 n_1'^2}. \quad (13)$$

(1) On peut voir, par exemple, pour la démonstration de toutes les propriétés rappelées ici, le Tome II de mon Cours de la Sorbonne sur la *Théorie analytique de la chaleur, mise en harmonie avec la Thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière*, p. 290 à 306.

Il est plus naturel de l'exprimer au moyen de la direction vraie (l', m', n') de la vibration, que de sa projection (l_1, m_1, n_1) sur le plan de l'onde. Or le second membre de (13) est homogène, du degré zéro, en l_1, m_1, n_1; et l'on peut y remplacer ces trois cosinus directeurs par les trois quantités proportionnelles $\frac{l'}{a^2}, \frac{m'}{b^2}, \frac{n'}{c^2}$. Il vient alors, vu l'égalité à 1 de la somme des trois carrés l'^2, m'^2, n'^2,

$$\frac{1}{v^2} = \frac{l'^2}{a^2} + \frac{m'^2}{b^2} + \frac{n'^2}{c^2}. \tag{14}$$

Ainsi, l'inverse du carré de la vraie vitesse v de propagation s'exprime linéairement au moyen des trois carrés l'^2, m'^2, n'^2 des cosinus directeurs de la vibration (¹).

5. Construisons, avec Fresnel, l'ellipsoïde, que nous qualifierons de *direct*,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \tag{15}$$

et faisons correspondre, à ses points (x, y, z), ceux (X, Y, Z) de l'ellipsoïde *inverse*,

$$a^2X^2 + b^2Y^2 + c^2Z^2 = 1, \tag{16}$$

par les relations

$$\frac{x}{a} = aX, \qquad \frac{y}{b} = bY, \qquad \frac{z}{c} = cZ, \tag{17}$$

qui donnent bien

$$a^2X^2 + b^2Y^2 + c^2Z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

L'on reconnaît aisément que les deux demi-diamètres, dits *correspondants*, joignant l'origine aux deux points respectifs (x, y, z) et

(¹) J'avais déjà donné cette formule simple au numéro de mai 1905 du *Bulletin des Sciences mathématiques* de M. Darboux, dans un Mémoire intitulé *Sur l'existence d'un ellipsoïde d'absorption dans tout cristal translucide, même sans plan de symétrie ni axe principal, et sur la construction des rayons lumineux dans les milieux opaques* [formule (25)].

(X, Y, Z), appartiennent, chacun, à la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan tangent mené à l'extrémité de l'autre, et qu'ils ont leur longueur inverse de celle de cette perpendiculaire. En particulier, les directions $\left(\frac{\alpha}{a^2}, \frac{\beta}{b^2}, \frac{\gamma}{c^2}\right)$ et $\left(\frac{l'}{a^2}, \frac{m'}{b^2}, \frac{n'}{c^2}\right)$ de la *pseudo-normale* aux ondes et de la *pseudo-vibration* sont données par les demi-diamètres qui correspondent, dans l'ellipsoïde inverse, aux demi-diamètres de l'ellipsoïde direct orientés suivant la vraie normale (α, β, γ) et suivant la vraie vibration (l', m', n').

Donc cette dernière (l', m', n'), par exemple, correspond, dans l'ellipsoïde direct, à la *pseudo-vibration* (l'_1, m'_1, n'_1), supposée représentée en direction par un demi-diamètre de l'ellipsoïde inverse; d'où il suit qu'elle est orientée suivant la normale à l'ellipsoïde inverse, menée à l'extrémité de ce demi-diamètre. Telle est une première manière de construire la vraie direction (l', m', n') de la vibration, quand on en connaît la *pseudo-direction* (l'_1, m'_1, n'_1).

Cela posé, on sait que l'ellipse d'intersection de l'ellipsoïde inverse par le plan d'onde diamétral $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ a ses demi-axes dirigés suivant les deux pseudo-vibrations possibles des ondes mêmes, ou dans les deux plans possibles de la vibration, et inverses de la vitesse ω de propagation de ces ondes suivant leur normale [1]. D'autre part, ayant construit la pseudo-normale, par rapport à laquelle sont transversales les vibrations vraies, menons-lui par l'origine un plan perpendiculaire. Il est clair que ce plan coupera justement les deux plans rectangulaires, déjà obtenus, des vibrations, suivant le sens des vibrations vraies : ce qui fournit une deuxième manière de construire celles-ci. Et comme, de plus, les rayons r se trouveront, dans ces mêmes plans de vibration, perpendiculaires à la vibration respective, de même que l'est déjà (hors des plans) la pseudo-normale, on voit que les deux projections de la pseudo-normale sur ces mêmes plans de vibration seront précisément, quant à la direction, les rayons r correspondants.

Enfin, leurs vitesses de propagation égaleront le demi-diamètre de l'ellipsoïde direct orienté suivant la vibration (l', m', n'). En effet, les

[1] *Voir* le Tome II, cité ci-dessus, p. 418.

coordonnées x, y, z de l'extrémité du demi-diamètre en question auront, en appelant r celui-ci, les valeurs rl', rm', rn'; et l'équation (15) de l'ellipsoïde direct donnera immédiatement, pour y déterminer r, la formule (14), qui exprime déjà l'inverse du carré r^2 de la vraie vitesse de propagation.

6. On voit comment l'adjonction de la pseudo-normale et de l'ellipsoïde direct à l'ellipsoïde inverse permet de construire, dans un milieu homogène et transparent quelconque, tous les éléments essentiels caractérisant un système d'ondes planes latéralement limitées, c'est-à-dire un pinceau de lumière parallèle, un *rayon lumineux*; et cela, sans recourir à l'onde courbe de Fresnel, enveloppe des ondes planes de toute direction, passées simultanément par l'origine des coordonnées. Cette onde courbe, du quatrième degré, et la construction d'Huygens où elle intervient, ne deviendraient indispensables, que s'il s'agissait d'obtenir, à la surface séparative de deux milieux homogènes transparents, tant les quatre systèmes d'ondes planes, deux réfléchis et deux réfractés, que les rayons correspondants, auxquels donne naissance soit un système défini d'ondes planes incidentes, soit le rayon incident qui le représente.

II. — De l'absorption par les cristaux translucides; équations fondamentales.

7. Nous appellerons translucide un corps qui se comportera sensiblement comme un milieu transparent dans des étendues de dimensions comparables aux longueurs d'ondulation, ou même aux largeurs ordinaires des ondes planes latéralement limitées (*rayons* ou *pinceaux* de lumière parallèle se propageant sans phénomènes de diffraction perceptibles), mais qui, cependant, après des parcours de quelques milliers de longueurs d'onde, aura produit une assez notable réduction de l'amplitude des mouvements. On pourra donc y calculer la réflexion et la réfraction, à la surface d'entrée des radiations, et le cheminement des ondes à l'intérieur sous des épaisseurs de quelques longueurs d'onde, comme s'il était transparent. Mais il faudra, sous les épaisseurs beaucoup plus grandes, y tenir compte du lent décroissement des amplitudes.

8. Ce décroissement s'expliquera, d'une manière simple, en admettant que l'éther éprouve, à vibrer dans les milieux dont il s'agit, de très petites résistances fonctions linéaires des composantes $\frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{dt}$ de la vitesse. Au contraire, les résistances compatibles avec la transparence, ou qui différencient essentiellement les petits mouvements élastiques de l'éther au milieu duquel baignent, disséminées çà et là, les molécules massives d'un corps, d'avec ces mouvements dans le même éther mais non entrecoupé de molécules pondérables, ou *libre*, sont fonctions linéaires des accélérations $\frac{d^2(\xi, \eta, \zeta)}{dt^2}$, c'est-à-dire du genre de celles qu'opposeraient, aux mouvements d'ensemble d'un *liquide parfait*, de petits solides, immergés, dans un tel liquide, à d'assez grandes distances relatives les uns des autres [1], résistances qu'avait déjà constatées du Buat dans les petites oscillations d'un pendule court. Quand le liquide est imparfait, ou à frottements intérieurs, il s'adjoint à cette résistance, du moins lorsque les mouvements considérés sont à peu près pendulaires, celles, plus connues, qui sont fonction linéaire des vitesses, avec coefficients *largement dépendants* de la période; et, en outre, les coefficients des résistances précédentes (fonction de l'accélération) éprouvent des changements dépendant aussi de la période, mais qui tendent vers zéro avec celle-ci [2].

Si l'on accepte cette analogie hydrodynamique pour les résistances qu'éprouve à vibrer l'éther, de la part de la matière pondérable, l'on conçoit que, vu l'excessive brièveté des périodes lumineuses, de tels changements dans les coefficients passent inaperçus, comparativement à la partie principale, sensiblement constante, des mêmes coefficients. Et comme de plus, dans la question hydrodynamique, les résistances fonction de la vitesse deviennent relativement peu influentes lors des très courtes vibrations, l'on s'explique qu'il y ait tant de corps soit transparents, soit au moins translucides, ou qu'il soit le plus souvent possible de négliger, en optique, ces résistances, à une première approximation.

---

[1] *Voir* le Tome II, cité ci-dessus, de mon *Cours de Physique mathématique*, p. 206 à 211.

[2] Même Tome II, p. 241 et 261. Dans les mouvements non pendulaires, la résistance due aux frottements intérieurs est bien plus compliquée encore (même Tome II, p. 238).

9. La résistance principale qu'éprouvera l'unité de volume d'éther, à vibrer dans un corps, s'exprimera donc, suivant les trois axes respectifs des x, y, z, par trois trinomes linéaires en $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{d^2\eta}{dt^2}$, $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$, dérivées secondes que nous écrirons simplement ξ'', η'', ζ''. Or l'analogie admise avec la résistance opposée par des solides à un liquide parfait conduit à prendre pour ces trinomes les trois dérivées partielles respectives, par rapport à ξ'', η'', ζ'', d'un même sextinome homogène du second degré en ξ'', η'', ζ'', où les trois coefficients affectant les carrés ξ''^2, η''^2, ζ''^2 sont, seuls, essentiellement négatifs. D'ailleurs, dans les changements d'axes coordonnés rectangulaires, ce sextinome, exprimé au moyen des composantes d'accélération suivant les nouveaux axes, lesquelles se transforment comme des coordonnées, fournira encore, par ses trois dérivées partielles relatives aux nouvelles composantes, les résistances correspondantes par unité de volume.

Cela posé, l'on sait qu'il y aura toujours un système *principal* d'axes pour lequel les trois rectangles $\eta''\zeta''$, $\zeta''\xi''$, $\xi''\eta''$ disparaîtront du sextinome, cas où les composantes de la résistance suivant les x, y, z se réduiront, respectivement, aux trois produits de coefficients négatifs par ξ'', η'', ζ''. Alors ces produits, transportés, avec signes contraires, dans les premiers membres des équations du mouvement, pour y être joints aux inerties changées de signe qui ont précisément les mêmes formes, donneront nos équations simples (1) ci-dessus. Mais, ici, nous devrons, comme on verra bientôt, adopter un autre système d'axes; et le sextinome sera complet. Les équations recevront donc les formes plus générales, à six coefficients a, b, c, d, e, f, dont les trois premiers seront positifs,

$$(18)\qquad \begin{cases} \mathrm{a}\xi'' + \mathrm{f}\eta'' + \mathrm{e}\zeta'' = \Delta_2\xi - \dfrac{d\theta}{dx}, \\ \mathrm{f}\xi'' + \mathrm{b}\eta'' + \mathrm{d}\zeta'' = \Delta_2\eta - \dfrac{d\theta}{dy}, \\ \mathrm{e}\xi'' + \mathrm{d}\eta'' + \mathrm{c}\zeta'' = \Delta_2\zeta - \dfrac{d\theta}{dz}. \end{cases}$$

10. A la deuxième approximation, où il faudra tenir compte des minimes résistances *de translucidité* linéaires en $\frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{dt}$ ou (pour abréger) en ξ', η', ζ', ces résistances, transportées avec signes contraires dans les premiers membres des équations de mouvement, ajouteront, aux premiers membres de ce système (18), de petits termes, que nous pourrons y écrire respectivement, avec *neuf* coefficients distincts $2a', 2b', 2c', d' \pm d'', e' \pm e'', f' \pm f''$, les trois premiers, positifs, les six autres, de signes divers,

$$(19)\qquad \left\{\begin{array}{l} 2a'\xi' + f'\eta' + e'\zeta' + (e''\zeta' - f''\eta'),\\ f'\xi' + 2b'\eta' + d'\zeta' + (f''\xi' - d''\zeta'),\\ e'\xi' + d'\eta' + 2c'\zeta' + (d''\eta' - e''\xi'). \end{array}\right.$$

Or les termes en d'', e'', f'' ne produisent pas l'absorption que l'on veut étudier, mais un tout autre phénomène, analogue à la polarisation rotatoire magnétique, et que l'on n'a constaté dans aucun corps transparent *à l'état naturel*, c'est-à-dire soustrait à l'influence du magnétisme ([1]). Il y a donc lieu de poser ici $(d'', e'', f'') = 0$.

Il est clair, d'ailleurs, que les expressions (19) restantes, dérivées respectives en ξ', η', ζ' du sextinome

$$(20)\qquad a'\xi'^2 + b'\eta'^2 + c'\zeta'^2 + d'\eta'\zeta' + e'\zeta'\xi' + f'\xi'\eta',$$

se transformeront, dans les changements d'axes, comme le faisaient les résistances principales en ξ'', η'', ζ'', vu que ξ', η', ζ' s'exprimeront encore à la manière de coordonnées. Le milieu admettra, par suite, un système *d'axes principaux* faisant évanouir d', e', f', ou ne laissant subsister dans le sextinome (20) que les trois termes essentiellement positifs $a'\xi'^2$, $b'\eta'^2$, $c'\zeta'^2$. Nous supposerons qu'on ait adopté précisément ce système d'axes; en sorte que les équations du mouvement seront

$$(21)\qquad \left\{\begin{array}{l} a\xi'' + f\eta'' + e\zeta'' + 2a'\xi' = \Delta_2\xi - \dfrac{d\theta}{dx},\\[2ex] f\xi'' + b\eta'' + d\zeta'' + 2b'\eta' = \Delta_2\eta - \dfrac{d\theta}{dy},\\[2ex] e\xi'' + d\eta'' + c\zeta'' + 2c'\zeta' = \Delta_2\zeta - \dfrac{d\theta}{dz}. \end{array}\right.$$

([1]) *Voir*, par exemple, le Tome II cité, p. 476 à 481, 602 à 604, et le Mémoire, également cité plus haut, du *Bulletin des Sciences mathématiques*, p. 3 et 4.

11. On sait comment, dans le cas des équations (18), s'obtiennent les formules régissant les ondes planes dont il a été question au § 1, et que nous supposerons d'abord latéralement indéfinies : α, β, γ étant les cosinus directeurs de la normale à ces ondes; ω leur vitesse de propagation; l', m', n' les cosinus directeurs de la vibration; enfin, l, m, n désignant, pour abréger, les trois quotients

$$(22)\qquad l=\frac{\alpha}{\omega},\qquad m=\frac{\beta}{\omega},\qquad n=\frac{\gamma}{\omega},$$

et ϖ, une fonction continue quelconque d'une variable, l'on prend ξ, η, ζ de la forme

$$(23)\qquad (\xi,\eta,\zeta)=(l',m',n')\,\varpi(t-lx-my-nz).$$

Ces expressions de ξ, η, ζ, substituées dans (18), donnent, après suppression du facteur commun ϖ'', en transposant d'ailleurs aux premiers membres tous les termes des seconds,

$$(24)\qquad \varphi l'+\chi m'+\psi n'=0,\quad \varphi_1 l'+\chi_1 m'+\psi_1 n'=0,\quad \varphi_2 l'+\chi_2 m'+\psi_2 n'=0,$$

où $\varphi, \chi, \psi, \varphi_1, \chi_1, \psi_1, \varphi_2, \chi_2, \psi_2$ représentent les polynomes, du second degré en l, m, n,

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} \varphi &= -(l^2+m^2+n^2)-l^2+\mathrm{a}, & \chi &= lm+\mathrm{f}, & \psi &= nl+\mathrm{e},\\ \varphi_1 &= lm+\mathrm{f}, & \chi_1 &= -(l^2+m^2+n^2)+m^2+\mathrm{b}, & \psi_1 &= mn+\mathrm{d},\\ \varphi_2 &= nl+\mathrm{e}, & \chi_2 &= mn+\mathrm{d}, & \psi_2 &= -(l^2+m^2+n^2)+n^2+\mathrm{c}. \end{aligned}\right.$$

La compatibilité des équations (24) exige l'annulation du déterminant des neuf éléments $\varphi, \chi, \psi, \varphi_1, \chi_1, \psi_1, \varphi_2, \chi_2, \psi_2$, fonction *paire* du sixième degré en l, m, n, que nous appellerons $\mathrm{F}(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, l, m, n)$, en y mettant ainsi en vue, pour une raison qu'on verra plus loin, les trois paramètres a, b, c *spécifiques* ou propres au milieu, outre les trois autres paramètres l, m, n, caractéristiques des ondes. L'on a donc, pour déterminer, vu (22), la vitesse ω des ondes, l'équation

$$(26)\qquad \mathrm{F}(\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c},l,m,n)=0;$$

après quoi deux quelconques des relations (24) font connaître les cosinus directeurs de la vibration par leurs rapports mutuels.

12. Mais les nouvelles équations linéaires (21) du mouvement ne sont plus homogènes quant à l'ordre des dérivées qui y figurent, à raison des dérivées premières ξ', η', ζ' que multiplient les très petits coefficients $2a'$, $2b'$, $2c'$; et l'on ne peut plus y satisfaire avec une fonction ϖ arbitraire. Toutefois, comme les physiciens ne considèrent guère, en optique, que des vibrations pendulaires, dont nous appellerons $\frac{2\pi}{k}$ la période, et où kt ne figurera que sous les signes cosinus ou sinus, comme, de plus, de telles expressions en t s'obtiennent par la superposition d'exponentielles imaginaires conjuguées, nous pourrons essayer de former d'abord des solutions *symboliques*, analogues à (23), où des constantes imaginaires L′, M′, N′ remplaceront l', m', n' et où ϖ sera le produit d'une constante encore imaginaire, I, par une exponentielle de la forme $e^{k(t-Lx-My-Nz)\sqrt{-1}}$, avec L, M, N imaginaires aussi pour remplacer l, m, n. La superposition de deux solutions pareilles, *purement formelles*, mais où toutes les imaginaires seront conjuguées chacune à chacune, nous fournira évidemment des valeurs de ξ, η, ζ réelles et vérifiant bien les équations voulues (21).

Nous prendrons donc provisoirement, au lieu de (23),

$$(\xi, \eta, \zeta) = (\mathrm{L}', \mathrm{M}', \mathrm{N}')\,\mathrm{I}\,e^{k(t-\mathrm{L}x-\mathrm{M}y-\mathrm{N}z)\sqrt{-1}}. \tag{27}$$

Il est vrai que, plus loin, nous y ferons lentement variables avec x, y, z les coefficients (ici L′I, M′I, N′I) de l'exponentielle. Mais, même alors, les vitesses ξ', η', ζ' y seront, en quelque sorte, homogènes avec les accélérations ξ'', η'', ζ'', ou réductibles avec elles; car on aura, par exemple,

$$\xi'' = \frac{d\xi'}{dt} = k\sqrt{-1}\,\xi' \qquad \text{ou} \qquad \xi' = -\frac{\sqrt{-1}}{k}\,\xi''.$$

Or, par le fait même, les petits termes en ξ', η', ζ', distinguant (21) de (18), se réduiront avec les termes respectifs en ξ'', η'', ζ'', pour donner en tout, au lieu de $a\xi''$, $b\eta''$, $c\zeta''$ comme dans (18), les trois expressions $A\xi''$, $B\eta''$, $C\zeta''$ où l'on aura posé

$$A = a - 2\frac{a'}{k}\sqrt{-1}, \qquad B = b - 2\frac{b'}{k}\sqrt{-1}, \qquad C = c - 2\frac{c'}{k}\sqrt{-1}. \tag{28}$$

Les nouvelles équations (21) du problème auront pris ainsi, grâce aux imaginaires, la forme (18), avec A, B, C, accrus de petites parties en

$\sqrt{-1}$, à la place de a, b, c réels. Et il est évident que les calculs algébriques indiqués tout à l'heure pour le cas de transparence (n° 11) deviendront utilisables au cas actuel de translucidité.

III. — Ondes planes latéralement indéfinies, dans un cristal translucide.

13. En particulier, les équations (24) deviendront

$$(29)\qquad \left\{\begin{aligned} &\varphi\,L' + \chi\,M' + \psi\,N' = 0,\\ &\varphi_1 L' + \chi_1 M' + \psi_1 N' = 0,\\ &\varphi_2 L' + \chi_2 M' + \psi_2 N' = 0,\end{aligned}\right.$$

où $\varphi, \chi, \psi, \varphi_1, \chi_1, \psi_1, \varphi_2, \chi_2, \psi_2$ auront encore les expressions (25), mais avec A, B, C, L, M, N au lieu de a, b, c, l, m, n; et l'annulation du déterminant conduira à la même équation (26), écrite

$$(30)\qquad F(A, B, C, L, M, N) = 0.$$

Quand, dans F, l'on remplacera A, B, C, L, M, N par leurs valeurs complexes, l'annulation séparée de la partie réelle et de la partie en $\sqrt{-1}$ dédoublera cette équation en deux distinctes; de telle sorte qu'on pourra se donner à volonté, non seulement, comme on a fait déjà par les relations (22), les rapports mutuels des parties réelles l, m, n de L, M, N où, dans (22), les cosinus directeurs α, β, γ peuvent définir la direction quelconque imposée aux ondes, mais encore les rapports mutuels des parties en $\sqrt{-1}$, que nous pourrons représenter par $-h\lambda\sqrt{-1}$, $-h\mu\sqrt{-1}$, $-h\nu\sqrt{-1}$, où λ, μ, ν seront les cosinus directeurs de la normale (menée vers l'intérieur) à la face d'entrée, pouvant être quelconque, de la lumière dans le milieu. Les expressions de L, M, N, ainsi écrites

$$(31)\qquad (L, M, N) = (l, m, n) - h(\lambda, \mu, \nu)\sqrt{-1} = \frac{(\alpha, \beta, \gamma)}{\omega} - h(\lambda, \mu, \nu)\sqrt{-1},$$

conserveront donc, pour satisfaire aux deux équations fournies par le dédoublement de (30), les deux paramètres disponibles ω et h, que ces équations permettront de déterminer en fonction des deux directions (α, β, γ) et (λ, μ, ν).

Mais souvenons-nous que les parties imaginaires de A, B, C, dans (28), et, par suite, celles de L, M, N qu'elles entraînent, sont extrêmement petites, bien assez pour qu'on puisse, dans tous les calculs, négliger leurs carrés et produits. On les assimilera donc à de simples différentielles, ayant les expressions respectives

$$(32)\quad \partial(\mathrm{A, B, C}) = -2\frac{(\mathrm{a}', \mathrm{b}', \mathrm{c}')}{k}\sqrt{-1}, \qquad \partial(\mathrm{L, M, N}) = -(\lambda, \mu, \nu)h\sqrt{-1};$$

et le premier membre de (30), développé par la formule de Taylor, s'écrira

$$\mathrm{F}(\mathrm{a, b, c}, l, m, n) - \frac{2}{k}\left(\frac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{a}}\mathrm{a}' + \frac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{b}}\mathrm{b}' + \frac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{c}}\mathrm{c}'\right)\sqrt{-1}$$
$$- h\left(\frac{d\mathrm{F}}{dl}\lambda + \frac{d\mathrm{F}}{dm}\mu + \frac{d\mathrm{F}}{dn}\nu\right)\sqrt{-1}.$$

Les deux parties réelle et imaginaire s'y trouvent toutes séparées; et l'on aura, d'une part, pour déterminer ω en fonction de α, β, γ, la même équation (26) que dans le cas de transparence, d'autre part, pour déterminer l'autre inconnue h, l'équation du premier degré

$$(33)\qquad h\left(\frac{d\mathrm{F}}{dl}\lambda + \frac{d\mathrm{F}}{dm}\mu + \frac{d\mathrm{F}}{dn}\nu\right) = -\frac{1}{k}\left(2\frac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{a}}\mathrm{a}' + 2\frac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{b}}\mathrm{b}' + 2\frac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{c}}\mathrm{c}'\right),$$

où l'on pourra remplacer les six dérivées partielles premières de F par des quantités qui leur soient proportionnelles.

14. Or l'on obtient de telles quantités, sans avoir besoin de former l'expression de F, en différentiant complètement les équations (24), qui impliquent (26) et, par suite, la différentielle totale de celle-ci,

$$(34)\qquad \frac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{a}}d\mathrm{a} + \frac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{b}}d\mathrm{b} + \frac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{c}}d\mathrm{c} + \frac{d\mathrm{F}}{dl}dl + \frac{d\mathrm{F}}{dm}dm + \frac{d\mathrm{F}}{dn}dn = 0.$$

Cinq des six accroissements infiniment petits $d\mathrm{a}$, $d\mathrm{b}$, ..., dn sont supposés ici avoir entre eux des rapports quelconques, le sixième seul se trouvant alors déterminé par la vérification constante de (26). Or la différentiation du système (24), où les différentielles dl', dm', dn'

recevront, dès lors, certaines valeurs qu'on devra éliminer, donne

$$\varphi\, dl' + \chi\, dm' + \psi\, dn' + l'\, d\varphi + m'\, d\chi + n'\, d\psi = 0,$$
$$\varphi_1\, dl' + \chi_1\, dm' + \psi_1\, dn' + l'\, d\varphi_1 + m'\, d\chi_1 + n'\, d\psi_1 = 0.$$
$$\varphi_2\, dl' + \chi_2\, dm' + \psi_2\, dn' + l'\, d\varphi_2 + m'\, d\chi_2 + n'\, d\psi_2 = 0.$$

L'élimination de dl', dm', dn' se fait en multipliant respectivement par l', m', n' ces équations et ajoutant terme à terme. Vu les expressions (25) de φ, χ, ψ,..., ψ_2, qui rendent symétrique le déterminant F, les coefficients totaux de dl', dm', dn', dans le résultat, ne seront autre chose que les premiers membres, déjà nuls, de (24). Il viendra donc, en remplaçant d'abord χ, ψ, φ_1, ψ_1, φ_2, χ_2 par leurs valeurs (25) où d, e, f sont constants,

$$(34\ bis)\quad l'^2\, d\varphi + m'^2\, d\chi_1 + n'^2\, d\psi_2 + 2m'n'd.mn + 2n'l'd.nl + 2l'm'd.lm = 0,$$

et puis, en substituant aussi à φ, χ_1, ψ_2 leurs valeurs (25),

$$\begin{aligned} &l'^2\, d\mathrm{a} + m'^2\, d\mathrm{b} + n'^2\, d\mathrm{c} - (l'^2 + m'^2 + n'^2)\, d(l^2 + m^2 + n^2) \\ &\quad + l'^2 d.l^2 + m'^2 d.m^2 + n'^2 d.n^2 + 2m'n'd.mn + 2n'l'd.nl + 2l'm'd.lm = 0. \end{aligned}$$

Enfin, par l'évaluation séparée et le groupement des termes en dl, en dm, en dn, on aura

$$(35)\quad \begin{aligned} &l'^2\, d\mathrm{a} + m'^2\, d\mathrm{b} + n'^2\, d\mathrm{c} \\ &\quad - 2\left[(l'^2 + m'^2 + n'^2)\, l - l'(ll' + mm' + nn')\right] dl + \ldots = 0. \end{aligned}$$

Or comparons cette relation à (34) et annulons-y successivement quatre quelconques des six différentielles $d\mathrm{a}$, $d\mathrm{b}$, $d\mathrm{c}$, dl, dm, dn. Si nous posons, pour abréger,

$$(36)\quad s = l^2 + m^2 + n^2, \qquad s' = l'^2 + m'^2 + n'^2, \qquad \sigma = ll' + mm' + nn',$$

nous aurons la quintuple proportion

$$(37)\quad \frac{2\dfrac{dF}{d\mathrm{a}}}{-l'^2} = \frac{2\dfrac{dF}{d\mathrm{b}}}{-m'^2} = \frac{2\dfrac{dF}{d\mathrm{c}}}{-n'^2} = \frac{\dfrac{dF}{dl}}{s'l - \sigma l'} = \frac{\dfrac{dF}{dm}}{s'm - \sigma m'} = \frac{\dfrac{dF}{dn}}{s'n - \sigma n'}.$$

Et les dénominateurs de ces rapports pourront être substitués aux numérateurs dans l'équation (33), qui deviendra ainsi

$$(38)\qquad h[(s'l-\sigma l')\lambda+(s'm-\sigma m')\mu+(s'n-\sigma n')\nu]=\frac{a'l'^2+b'm'^2+c'n'^2}{k}.$$

15. Nous simplifierons considérablement l'expression qui résulte de là pour h en introduisant le rayon r de la surface d'onde courbe de Fresnel, droite qui joint l'origine des coordonnées au point (x, y, z) où l'onde plane

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=\omega,\qquad \text{ou bien, ici,}\qquad lx+my+nz=1,$$

partie de l'origine depuis une unité de temps, touche son enveloppe (*onde courbe*) obtenue en y faisant varier α, β, γ, c'est-à-dire l, m, n, de toutes les manières possibles. On sait que ce point (x, y, z), commun à l'onde plane et à toutes ses voisines où l, m, n ont varié de dl, dm, dn, se détermine par les équations

$$(39)\qquad \frac{x}{\frac{dF}{dl}}=\frac{y}{\frac{dF}{dm}}=\frac{z}{\frac{dF}{dn}}=\frac{1}{l\frac{dF}{dl}+m\frac{dF}{dm}+n\frac{dF}{dn}},$$

qui deviennent ici, à raison de (37),

$$(40)\qquad \frac{x}{s'l-\sigma l'}=\frac{y}{s'm-\sigma m'}=\frac{z}{s'n-\sigma n'}=\frac{1}{ss'-\sigma^2}.$$

Un cinquième rapport égal s'obtient en élevant les trois premiers au carré, ajoutant terme à terme et extrayant enfin la racine carrée *positive* du résultat, vu la valeur du quatrième rapport (40), dont le dénominateur équivaut visiblement, d'après (36), à la somme des carrés de $mn'-nm'$, $nl'-ln'$, $lm'-ml'$. Le carré de ce cinquième rapport aura évidemment pour numérateur r^2 et pour dénominateur

$$ss'^2+s'\sigma^2-2s'\sigma^2=s'(ss'-\sigma^2);$$

en sorte que ce cinquième rapport est $\frac{r}{\sqrt{s'(ss'-\sigma^2)}}$. Son égalisation au quatrième donne

$$\frac{1}{ss'-\sigma^2}=\frac{r^2}{s'};$$

et il vient par suite

$$(41)\qquad s'l-\sigma l'=\frac{x}{r}\frac{s'}{r},\qquad s'm-\sigma m'=\frac{y}{r}\frac{s'}{r},\qquad s'n-\sigma n'=\frac{z}{r}\frac{s'}{r}.$$

La substitution de ces valeurs dans (38) introduit immédiatement le cosinus de l'angle, que nous appellerons V, fait par la direction $\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right)$ du rayon r avec la normale (λ,μ,ν) à la face d'entrée des ondes dans le corps; et nous aurons, en remplaçant d'ailleurs s' par son expression (36), la formule

$$(42)\qquad h=\frac{r}{\cos V}\,\frac{a'l'^2+b'm'^2+c'n'^2}{k(l'^2+m'^2+n'^2)}.$$

16. Il reste à déterminer, dans la solution symbolique, L′, M′, N′, dont nous serons conduits à appeler l', m', n' les parties réelles et $l'l''\sqrt{-1}$, $m'm''\sqrt{-1}$, $n'n''\sqrt{-1}$ les parties imaginaires.

Une fois obtenus ω, h ou, par suite, L, M, N et, dans (29), φ, χ, ψ, φ_1, ..., deux quelconques de ces équations (29) fourniront, par leurs déterminants mineurs, les rapports mutuels de L′, M′, N′. D'ailleurs, les multiplications à faire de facteurs complexes, pour évaluer tant φ, χ, ψ, ..., que ces déterminants mineurs, donneront sans cesse, comme produits, des parties réelles formées soit avec deux facteurs réels, soit avec deux facteurs en $\sqrt{-1}$, et des parties imaginaires formées avec un facteur réel et un facteur en $\sqrt{-1}$. Or les facteurs en $\sqrt{-1}$ à combiner sont tous, ici, du premier ordre de petitesse et ont leurs produits négligeables. Donc, en résumé, les parties réelles *sensibles* des déterminants mineurs ne seront formées qu'avec les parties réelles des données, les mêmes que dans le cas de transparence, et les parties imaginaires seront petites du premier ordre.

L'on pourra, finalement, diviser les trois déterminants mineurs employés, par la racine carrée de la somme des carrés de leurs parties réelles et prendre les quotients comme valeurs de L′, M′, N′. Il est clair qu'alors les parties réelles de L′, M′, N′ seront les mêmes que dans le cas de transparence, c'est-à-dire les trois cosinus directeurs de la vibration, l', m', n', obtenus pour ce cas; et, dans les parties imaginaires $l'l''\sqrt{-1}$, $m'm''\sqrt{-1}$, $n'n''\sqrt{-1}$, les facteurs l'', m'', n'' se trouveront très petits, de l'ordre de a', b', c'. Il viendra donc

$$(43)\quad L' = l'(1 + l''\sqrt{-1}) = l'e^{l''\sqrt{-1}},\qquad M' = m'e^{m''\sqrt{-1}},\qquad N' = n'e^{n''\sqrt{-1}}.$$

17. Enfin, prenons, dans (27), pour le coefficient *d'amplitude* I, une expression imaginaire quelconque, sous la forme $\frac{1}{2}e^{i+j\sqrt{-1}}$; et les trois expressions symboliques formées (27) de ξ, η, ζ seront, en y remplaçant L, M, N, L', M', N' par les valeurs (31) et (43),

$$(44)\quad (\xi, \eta, \zeta) = (l', m', n')\frac{e^i}{2}e^{-kh(\lambda x+\mu y+\nu z)}e^{[k(t-lx-my-nz)+j+(l'',m'',n'')]\sqrt{-1}}.$$

Si nous y changeons le signe de $\sqrt{-1}$, nous aurons évidemment une deuxième solution symbolique, conjuguée de celle-là; et la somme des deux nous donnera enfin la solution réelle cherchée des équations effectives (21) du mouvement:

$$(45)\quad \begin{aligned}(\xi, \eta, \zeta) &= (l', m', n')e^i e^{-kh(\lambda x+\mu y+\nu z)}\\ &\quad\times\cos[k(t - lx - my - nz) + j + (l'', m'', n'')].\end{aligned}$$

Les inégalités extrêmement petites de phase, dues à l'', m'', n'', entre les trois composantes ξ, η, ζ du déplacement, seront négligeables ou échapperont à l'observation; de sorte qu'on peut les annuler pratiquement, en supprimant même l'', m'', n''. Alors les vibrations sont rectilignes, avec l'orientation (l', m', n') et, vu (22), la vitesse ω de propagation, exactement comme dans le cas de transparence. Mais la demi-amplitude du mouvement, représentée par e^i à la face d'entrée $\lambda x + \mu y + \nu z = 0$, décroît lentement, à partir de là, dans l'intérieur; car son expression est, partout,

$$(46)\quad e^i e^{-kh(\lambda x+\mu y+\nu z)},$$

où le trinome $\lambda x + \mu y + \nu z$ égale la distance du point intérieur quelconque (x, y, z) à la face d'entrée.

18. On peut voir maintenant les raisons pour lesquelles, au moins dans le cas d'ondes latéralement indéfinies, il convient de choisir la direction (λ, μ, ν) normale à la face d'entrée et, faisant, d'ailleurs, avec les rayons lumineux qui correspondent aux ondes planes (45), un angle V aigu, de manière à rendre positive la valeur (42) du paramètre h, ou décroissante vers l'intérieur l'exponentielle (46). Si, en effet, la face d'entrée, qui passe par l'origine, ne se confondait pas avec le plan $\lambda x + \mu y + \nu z = 0$, la demi-amplitude (46) des vibrations n'y serait pas constante, comme elle doit l'être, naturellement, si ces vibrations résultent d'ondes incidentes latéralement indéfinies aussi, mais propagées dans un milieu transparent et, par suite, d'amplitude uniforme partout.

D'autre part, même avec V aigu, ou l'exponentielle (46) décroissante quand on chemine vers l'intérieur du corps, il suffirait évidemment que la face d'entrée fût coupée par le plan $\lambda x + \mu y + \nu z = 0$, pour qu'il y eût dans le corps, assez loin de la droite d'intersection, des points où la distance $\lambda x + \mu y + \nu z$ à ce plan serait négative et très grande; en sorte que l'exponentielle (46) y ferait prendre, à l'amplitude des mouvements, des valeurs dépassant toutes celles qu'on peut physiquement admettre pour de petites vibrations élastiques de l'éther.

IV. — Ondes planes latéralement limitées, dans le même cristal translucide.

19. Quand un pinceau de lumière parallèle, un *rayon lumineux*, latéralement assez large pour ne pas offrir de diffraction sensible, pénètre dans un cristal par réfraction à sa face d'entrée, les déplacements ξ, η, ζ présentent à une première approximation, lors de vibrations pendulaires, les caractères exprimés par cette solution (45); mais les deux paramètres i et j, au lieu d'y être constants, du moins tous les deux, peuvent y être, i principalement, des fonctions de x, y, z *très graduellement variables*, c'est-à-dire paraître sensiblement constants dans toute étendue dont les dimensions sont de l'ordre d'une longueur d'onde, mais passer de leurs valeurs notables à d'autres bien différentes, *au bout d'assez longs parcours*; et, en particulier, le coefficient e^i d'amplitude s'annule identiquement hors de régions limitées des plans d'onde $lx + my + nz =$ const. Il y a donc lieu de voir comment se modifie la solution symbolique (27) (p. 328) lorsqu'on rend lentement variable avec x, y, z le coefficient analogue, dit *d'amplitude*, I, ou que I acquiert de petites dérivées $\frac{dI}{d(x, y, z)}$, de manière, en particulier, à recevoir des valeurs *arbitraires* bien continues sur la face d'entrée du cristal.

Par le fait même, les coefficients L′I, M′I, N′I de l'exponentielle imaginaire dans (27), où il est entendu que L′, M′, N′ garderont leurs expressions *constantes* (43) (p. 334), ne pourront plus suffire; car elles n'ont permis de satisfaire aux équations (21) du mouvement que dans l'hypothèse de I constant. Et il faudra leur ajouter trois petites fonctions *correctives* ε, ε_1, ε_2, de x, y, z, de l'ordre des dérivées partielles $\frac{dI}{d(x, y, z)}$ dont l'annulation partout entraînerait la leur. Mais nous supposerons que le coefficient I convienne, ou soit choisi précisément, pour ce qu'on peut appeler la *projection totale du déplacement imaginaire sur la direction symbolique invariable* (L′, M′, N′), c'est-à-dire soit tel, que l'on ait

$$(47) \qquad L'\xi + M'\eta + N'\zeta = (L'^2 + M'^2 + N'^2)\,I\,e^{k(t-Lx-My-Nz)\sqrt{-1}}.$$

Les nouvelles expressions de ξ, η, ζ s'écriront donc

$$(48) \qquad (\xi, \eta, \zeta) = (L'I + \varepsilon,\ M'I + \varepsilon_1,\ N'I + \varepsilon_2)\,e^{k(t-Lx-My-Nz)\sqrt{-1}},$$

formules qui, substituées dans (47), donneront identiquement, entre les trois petites fonctions correctives ε, ε_1, ε_2, la relation linéaire

$$(49) \qquad L'\varepsilon + M'\varepsilon_1 + N'\varepsilon_2 = 0.$$

Deux d'entre elles, seules, seront donc encore disponibles.

20. Il reste évidemment à déterminer ces deux petites fonctions de x, y, z, et I, qui n'est arbitraire que sur la face d'entrée, de manière à faire vérifier *formellement* par les expressions (48) de ξ, η, ζ les équations (18) du mouvement, où A, B, C remplaceraient a, b, c.

Notons, à cet effet, non seulement que les dérivées partielles de I seront petites, mais que, de plus, elles varieront très graduellement, chacune d'elles n'éprouvant des changements comparables à sa valeur que le long de parcours d'un grand nombre de longueurs d'onde. Par suite, ces dérivées premières de I auront leurs propres dérivées beaucoup plus petites, en quelque sorte, qu'elles ne sont elles-mêmes; et, au degré d'approximation où l'on est tenu de les introduire, elles, dans les calculs, on pourra les regarder comme constantes, c'est-à-dire négliger les dérivées partielles secondes de I. De même, les quotients, par I, de ces dérivées premières de I, pourront être supposés constants; car les variations du dénominateur I n'introduiraient, dans les dérivées des quotients, que des produits, négligeables, du numérateur déjà très faible par des dérivées de I. Donc aussi les fonctions correctives ε, ε_1, ε_2, qui sont de l'ordre des dérivées premières de I, se comporteront comme des constantes.

Dans ces conditions, les petits termes de ξ, η, ζ produits de ε, ε_1, ε_2 par l'exponentielle, portés dans les équations (18) du mouvement (ramenées encore à avoir zéro à leurs seconds membres), donneront, aux premiers membres, après suppression des facteurs communs, des expressions comme celles qu'on obtenait en L'I, M'I, N'I quand I était constant, savoir, d'après les résultats précédents (29) multipliés par I,

$$\varphi\varepsilon + \chi\varepsilon_1 + \psi\varepsilon_2, \quad \varphi_1\varepsilon + \chi_1\varepsilon_1 + \psi_1\varepsilon_2, \quad \varphi_2\varepsilon + \chi_2\varepsilon_1 + \psi_2\varepsilon_2. \tag{30}$$

Voyons maintenant ce qu'ajouteront à ces expressions les parties principales de ξ, η, ζ, c'est-à-dire le produit $\mathrm{I}e^{k(t-\mathrm{L}x-\mathrm{M}y-\mathrm{N}z)\sqrt{-1}}$, multiplié respectivement par L', M', N'. Une dérivation de ce produit en x, par exemple, donne comme dérivée ce produit lui-même, multiplié par le binome

$$-k\mathrm{L}\sqrt{-1} + \frac{1}{\mathrm{I}}\frac{d\mathrm{I}}{dx} = -k\sqrt{-1}\left(\mathrm{L} + \frac{1}{k\mathrm{I}}\frac{d\mathrm{I}}{dx}\sqrt{-1}\right);$$

et le résultat est ce qu'on aurait eu pour I constant, mais à cela près que le facteur constant L ainsi introduit se trouve accru de la très petite quantité, *censée constante aussi*, $\frac{1}{k\mathrm{I}}\frac{d\mathrm{I}}{dx}\sqrt{-1}$. Un tel facteur subsistera donc, sans produire aucune complication nouvelle, dans les différentiations ultérieures à effectuer sur la fonction d'où l'on est parti. De même, les différentiations en y et en z introduiraient les facteurs analogues

$$\mathrm{M} + \frac{1}{k\mathrm{I}}\frac{d\mathrm{I}}{dy}\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad \mathrm{N} + \frac{1}{k\mathrm{I}}\frac{d\mathrm{I}}{dz}\sqrt{-1}.$$

Donc les parties principales de ξ, η, ζ donneront, après suppression de facteurs communs, des expressions comme les premiers membres de (29) multipliés par I, mais où les variables L, M, N des neuf polynomes φ, χ, ψ, φ_1, ... auraient subi les très petits accroissements respectifs

$$(51) \qquad \partial(\mathrm{L}, \mathrm{M}, \mathrm{N}) = \frac{1}{k\mathrm{I}}\frac{d\mathrm{I}}{d(x, y, z)}\sqrt{-1}.$$

21. Appelons $\varphi + \partial\varphi$, $\chi + \partial\chi$, $\psi + \partial\psi$, $\varphi_1 + \partial\varphi_1$, ..., ce que deviennent alors ces neuf fonctions, avec leurs petites variations symboliques $\partial\varphi$, $\partial\chi$, ..., évidemment calculables à la manière de différentielles totales; et, ajoutant enfin les premiers membres de (29) ainsi modifiés (p. 329) aux expressions précédentes (50), il viendra, par exemple, comme première équation du mouvement,

$$(52) \quad (\mathrm{L}'\mathrm{I} + \varepsilon)\varphi + (\mathrm{M}'\mathrm{I} + \varepsilon_1)\chi + (\mathrm{N}'\mathrm{I} + \varepsilon_2)\psi + \mathrm{I}(\mathrm{L}'\partial\varphi + \mathrm{M}'\partial\chi + \mathrm{N}'\partial\psi) = 0.$$

On peut y supprimer les termes principaux en $\mathrm{I}\varphi$, $\mathrm{I}\chi$, $\mathrm{I}\psi$, à raison de la première équation (29). De plus, dans les trois termes où figurent les très petits facteurs ε, ε_1, ε_2, les facteurs finis φ, χ, ψ peuvent, évidemment, être réduits à leurs parties notables où l, m, n remplacent L, M, N et ont les valeurs du cas de transparence. Enfin, dans les trois derniers termes, en $\partial\varphi$, $\partial\chi$, $\partial\psi$, de l'ordre des petites dérivées de I, non seulement L', M', N' peuvent, de même, être réduits, d'après (43), à leurs parties principales l', m', n', mais, en outre, les dérivées $\frac{d(\varphi, \chi, \psi)}{d(\mathrm{L}, \mathrm{M}, \mathrm{N})}$ figurant aux développements de $\partial\varphi$, $\partial\chi$, $\partial\psi$ peuvent s'évaluer, de même, avec substitution de l, m, n à L, M, N. Cette première équation du mouvement, et les deux autres, analogues, deviennent donc, en définitive,

$$(53) \qquad \begin{cases} \varphi\,\varepsilon + \chi\,\varepsilon_1 + \psi\,\varepsilon_2 + \mathrm{I}(l'\,\partial\varphi + m'\,\partial\chi + n'\,\partial\psi) = 0, \\ \varphi_1\varepsilon + \chi_1\varepsilon_1 + \psi_1\varepsilon_2 + \mathrm{I}(l'\,\partial\varphi_1 + m'\,\partial\chi_1 + n'\,\partial\psi_1) = 0, \\ \varphi_2\varepsilon + \chi_2\varepsilon_1 + \psi_2\varepsilon_2 + \mathrm{I}(l'\,\partial\varphi_2 + m'\,\partial\chi_2 + n'\,\partial\psi_2) = 0, \end{cases}$$

où les différentielles totales $\partial\varphi$, $\partial\chi$, ... à prendre seront celles des fonctions (25) (p. 327) relatives au cas de transparence, avec de très faibles accroissements de l, m, n représentés, d'après (51), par les formules

$$(54) \qquad \partial(l, m, n) = \frac{1}{k\mathrm{I}} \frac{d\mathrm{I}}{d(x, y, z)}\sqrt{-1}.$$

22. Multiplions respectivement ces trois équations (53) par l', m', n' et ajoutons-les. Comme le déterminant des neuf éléments $\varphi, \chi, \psi, \ldots$ est symétrique, les trois coefficients totaux de ε, ε_1, ε_2 s'annuleront en vertu de (24); et, après suppression du facteur commun I, il viendra pour régir la fonction I, vu les valeurs (25) de χ, ψ, φ_1, ψ_1, φ_2, χ_2, l'équation

$$(55) \qquad l'^2\,\partial\varphi + m'^2\,\partial\chi_1 + n'^2\,\partial\psi_2 + 2m'n'\,\partial.mn + 2n'l'\,\partial.nl + 2l'm'\,\partial.lm = 0.$$

Elle est exactement pareille à (34 *bis*) (p. 331) et donne évidemment, en ∂l, ∂m, ∂n, le développement (35) en dl, dm, dn, mais pris avec $d(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}) = 0$, vu que, ici, l, m, n seuls reçoivent des accroissements, savoir, ceux qui ont les formules (54). L'équation (55) sera donc, encore avec les notations abrégées (36),

$$(56) \qquad (s'l - \sigma l')\frac{d\mathrm{I}}{dx} + (s'm - \sigma m')\frac{d\mathrm{I}}{dy} + (s'n - \sigma n')\frac{d\mathrm{I}}{dz} = 0.$$

Or les formules (40) (p. 332) montrent que les trois coefficients $s'l - \sigma l'$, $s'm - \sigma m'$, $s'n - \sigma n'$ sont entre eux comme les cosinus directeurs des rayons lumineux correspondant aux ondes planes proposées, c'est-à-dire comme les cosinus de la direction suivant laquelle le mouvement se transmet intégralement sur chaque onde dans le milieu censé transparent. Décrivons donc un élément $(\partial x, \partial y, \partial z)$ de chemin le long du rayon, à partir de (x, y, z); et, ∂x, ∂y, ∂z étant alors proportionnels aux trois cosinus directeurs, l'équation (56) deviendra

$$(57) \qquad \frac{d\mathrm{I}}{dx}\partial x + \frac{d\mathrm{I}}{dy}\partial y + \frac{d\mathrm{I}}{dz}\partial z = 0 \qquad \text{ou} \qquad \partial\mathrm{I} = 0.$$

23. Ainsi, les équations (21) du mouvement n'astreignent *le coefficient* I *d'amplitude qu'à rester invariable le long de chaque rayon lumineux du milieu censé transparent.* Si donc on pose, comme précédemment, $I = \frac{1}{2}e^{i+j\sqrt{-1}}$, tant le coefficient réel e^i d'amplitude que le changement j de phase conserveront, tout le long de chaque rayon émané de la face d'entrée suivant une direction constante, les valeurs fournies, à cette face d'entrée, par les conditions définies relatives à la surface séparative de deux milieux sensiblement transparents, valeurs qui seront, d'une part, constante pour le changement j de phase (si la surface est homogène), d'autre part, proportionnelle, pour le coefficient e^i d'amplitude, à l'amplitude même des vibrations incidentes, donnée pour chaque région de la face d'entrée.

La fonction I se trouvant ainsi déterminée, dans tout le milieu translucide, par l'équation (57) qui exprime la compatibilité des quatre équations linéaires (49) et (53) en ε, ε_1, ε_2, ces équations feront évidemment connaître, pour ε, ε_1, ε_2, en fonction de x, y, z, des expressions de l'ordre de $I\,\partial\varphi$, $I\,\partial\chi$, ... ou des petites dérivées $\frac{dI}{d(x, y, z)}$, comme on avait pressenti qu'elles le seraient; et toutes les équations du problème seront vérifiées.

24. Ces petites fonctions ε, ε_1, ε_2, une fois connues, ajouteront au module et à l'argument des coefficients principaux L'I, M'I, N'I de l'exponentielle, dans les formules (48) de ξ, η, ζ, ou, plus simplement, à leurs quotients L', M', N' par I, de minimes corrections, revenant à remplacer dans (43) les modules l', m', n', si ε', ε'_1, ε'_2 désignent certaines petites fonctions de x, y, z, par $l'e^{\varepsilon'}$, $m'e^{\varepsilon'_1}$, $n'e^{\varepsilon'_2}$, et à accroître les arguments l'', m'', n'', très faibles déjà, de parties également insensibles, mais fonction de x, y, z et qui les porteront à de nouvelles valeurs l''_1, m''_1, n''_1.

Enfin, I étant toujours $\frac{1}{2}e^{i+j\sqrt{-1}}$, la solution symbolique (48) s'écrira, au lieu de (44),

$$(58)\quad (\xi, \eta, \zeta) = (l'e^{\varepsilon'}, m'e^{\varepsilon'_1}, n'e^{\varepsilon'_2})\frac{e^i}{2}e^{-kh(\lambda x+\mu y+\nu z)}e^{[k(t-lx-my-nz)+j+(l''_1, m''_1, n''_1)]\sqrt{-1}}.$$

Et, par sa superposition avec sa conjuguée, elle donnera, au lieu de (45), la solution réelle

$$(59)\quad \begin{aligned}(\xi, \eta, \zeta) = {} & (l'e^{\varepsilon'}, m'e^{\varepsilon'_1}, n'e^{\varepsilon'_2})\,e^i e^{-kh(\lambda x+\mu y+\nu z)} \\ & \times \cos[k(t-lx-my-nz)+j+(l''_1, m''_1, n''_1)].\end{aligned}$$

Pratiquement, les petites quantités variables ε', ε'_1, ε'_2, l''_1, m''_1, n''_1 seront insensibles, ou réductibles à zéro. Donc *les déplacements vibratoires* ξ, η, ζ *auront* précisément, *en chaque point* (x, y, z) *du milieu translucide, leurs valeurs au même point dans le milieu censé transparent, multipliées par l'exponentielle commune*

$$e^{-kh(\lambda x+\mu y+\nu z)}. \tag{60}$$

Il n'y a de différence d'avec le cas d'ondes latéralement indéfinies que dans *le coefficient* e^i *d'amplitude, ici variable arbitrairement*, quoique d'une manière très graduelle, *d'un rayon lumineux aux rayons parallèles voisins*.

V. — Ellipsoïde d'absorption: formes simples du coefficient d'extinction de la lumière dans le cristal.

25. Ainsi, l'amplitude des vibrations s'affaiblit, sur chaque rayon émané de la face d'entrée suivant une direction qui fait l'angle V avec la normale à cette face, à mesure que son trajet croissant u dans le milieu translucide le porte à une plus grande distance $\lambda x + \mu y + \nu z$ de la face d'entrée. Comme cette distance égale la projection, sous l'angle V, du chemin u parcouru par le rayon, on a

$$\lambda x + \mu y + \nu z = u \cos V,$$

et l'exponentielle (60), fraction qui subsiste encore de l'amplitude à l'entrée, devient $e^{-kh\cos V\, u}$, ou bien, vu la valeur (42) de h (p. 333) dans laquelle on prendra pour l', m', n' les cosinus directeurs de la vibration,

$$e^{-fu}, \quad \text{avec} \quad f = r(\mathrm{a}'l'^2 + \mathrm{b}'m'^2 + \mathrm{c}'n'^2). \tag{61}$$

Le coefficient f du parcours u, dans l'exposant négatif de l'exponentielle e^{-fu}, est ce qu'on appelle le *coefficient d'absorption* ou *d'extinction*, du cristal, pour l'*amplitude* des vibrations de direction (l', m', n').

Construisons une droite égale à son inverse $\frac{1}{f}$ et puis la moyenne proportionnelle entre cette droite et la vitesse connue r du rayon lumineux, dans le milieu censé transparent. Enfin, portons, à partir de l'origine, cette moyenne proportionnelle, dans la direction donnée (l', m', n') des vibrations. Si x, y, z désignent les coordonnées de son extrémité, nous aurons

$$(x, y, z) = \sqrt{\frac{r}{f}}(l', m', n'), \qquad \text{d'où} \qquad (l', m', n') = \sqrt{\frac{f}{r}}(x, y, z);$$

et la formule (61) de f donnera

$$\mathrm{a}' x^2 + \mathrm{b}' y^2 + \mathrm{c}' z^2 = 1. \tag{62}$$

Le lieu des points (x, y, z) est donc un ellipsoïde, qui se trouve ainsi propre à exprimer l'action absorbante ou extinctrice du cristal pour les vibrations orientées suivant les divers sens.

Comme les trois coefficients principaux a', b', c' d'absorption ont entre eux, dans les cristaux non cubiques naturels, des rapports très différents de l'unité, tandis que leur biréfringence, toujours faible, laisse le rayon r presque indépendant de la direction, le coefficient d'extinction f des amplitudes aura son inverse sensiblement proportionnel au carré du demi-diamètre de l'ellipsoïde mené suivant la direction de la vibration : ce qui justifiera le nom d'*ellipsoïde d'absorption* donné à cette surface, conformément à une induction suggérée par l'expérience à divers physiciens et minéralogistes, notamment Henri Becquerel, Mallard, M. Camichel, M. Carvallo, etc.

26. Pratiquement, le coefficient d'absorption à considérer sera non pas précisément f, mais le double de f, qui aura ainsi l'expression

$$2f = r(2\mathrm{a}' l'^2 + 2\mathrm{b}' m'^2 + 2\mathrm{c}' n'^2) \tag{63}$$

et contiendra intégralement les trois coefficients principaux des résistances (19) proportionnelles aux vitesses. En effet, dans les additions ou superpositions d'ondes diverses constituant un éclairement total, ce qui s'ajoute *arithmétiquement*, en chaque endroit, pour y mesurer *l'intensité lumineuse*, c'est, au moins en moyenne, la demi-force vive due aux ondes partielles ou aux mouvements de divers sens, et non les quantités de ces mouvements ou les amplitudes. Or, la demi-force vive est, dans chaque onde, proportionnelle au carré de l'amplitude; et, de plus, ses trois fractions correspondant, pour une vitesse effective V, aux composantes l'V, m'V, n'V du mouvement suivant les trois axes, s'expriment précisément par les trois carrés l'^2, m'^2, n'^2, dont la somme donne l'unité. L'exponentielle décroissante à considérer est donc essentiellement e^{-2fu}, carré de e^{-fu}; et c'est bien $2f$ qui y figure comme coefficient de la distance u parcourue.

La formule (63) pourra donc s'énoncer en disant que *le coefficient* $2f$ *d'absorption est le produit de la vitesse* r *de propagation du rayon, par une moyenne entre les trois coefficients principaux* 2a′, 2b′, 2c′ *de résistance, où chacun d'eux figure pour la fraction de l'éclairement due à la composante du mouvement vibratoire suivant l'axe principal correspondant* [1].

27. Il y a lieu d'observer que, dans nos équations (21) de mouvement (p. 326), les petits coefficients de résistance que désignent, à un facteur constant près, a′, b′, c′, se forment par addition pure et simple de leurs valeurs relatives aux diverses molécules pondérables disséminées au sein de l'unité de volume d'éther, et en adoptant comme axes coordonnés les *axes principaux de leur ensemble*, ou axes de symétrie de ces résistances pour la totalité des molécules. Or c'est bien d'accord avec les résultats d'observations très étendues, dues à Henri Becquerel, qui a reconnu, en outre, le siège presque exclusif de ces résistances de translucidité, dans des impuretés incorporées au cristal en quantités généralement minimes.

La formule (61) de f ne contient pas explicitement k, ou ne dépend pas directement de la période vibratoire. Mais l'analogie hydrodynamique qui a suggéré les expressions (19) (p. 326) des résistances de translucidité conduit à penser (p. 324) que, conformément à l'expérience, les coefficients a′, b′, c′, d′, e′, f′ de ces expressions dans tous les systèmes d'axes, notamment dans le système principal où d′, e′, f′ s'annulent, varieront assez largement avec la période, c'est-à-dire

---

[1] On peut voir, aux pages 616 à 618 du Tome II de mon *Cours de Physique mathématique*, que la même loi s'applique aussi, du moins dans certaines conditions, à des milieux doués de pouvoirs rotatoires, pourvu qu'on y considère, en chaque point, la moyenne des demi-forces vives successives, au lieu des demi-forces vives à un moment donné.

avec la couleur des lumières simples considérées (d'où résulte l'explication du *polychroïsme*); et que, de plus, l'orientation de ces axes de symétrie des résistances de translucidité en dépendra *généralement*, c'est-à-dire en dehors des cas de contextures symétriques.

28. Quand on tient compte de la biréfringence du cristal, il y a lieu de remplacer la vitesse r du rayon, dans la formule (61) de f, par son expression tirée de la relation simple (14) (p. 321). Mais comme les cosinus directeurs figurant dans celle-ci sont pris par rapport aux axes de symétrie des résistances compatibles avec la transparence, c'est-à-dire par rapport aux axes des ellipsoïdes (15), (16) ou de l'onde courbe de Fresnel, en général très différents de *ceux de l'ellipsoïde d'absorption adoptés ici*, nous devrons désigner ces cosinus directeurs autrement que par l', m', n'. Aussi les appellerons-nous $\mathfrak{l}'$, $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{n}'$; ce qui donnera, d'après (14),

$$\frac{1}{r} = \sqrt{\frac{\mathfrak{l}'^2}{a^2} + \frac{\mathfrak{m}'^2}{b^2} + \frac{\mathfrak{n}'^2}{c^2}}. \tag{64}$$

Pour amener alors au maximum de simplicité l'expression de l'absorption, nous évaluerons le trajet u de la lumière dans le cristal par le temps t_0 employé à l'effectuer; ce qui donnera

$$u = r t_0 \qquad \text{et} \qquad e^{-fu} = e^{-(rf)t_0}.$$

Nous appellerons donc $\mathfrak{f}$ le nouveau coefficient rf d'absorption; et nous aurons, d'après (61) et (64), pour la fraction de l'amplitude à l'entrée qui subsistera dans le rayon après un trajet de durée t_0, l'exponentielle $e^{-\mathfrak{f}t_0}$, avec la valeur suivante de $\mathfrak{f}$,

$$\mathfrak{f} = \frac{\mathfrak{a}' l'^2 + \mathfrak{b}' m'^2 + \mathfrak{c}' n'^2}{\dfrac{\mathfrak{l}'^2}{a^2} + \dfrac{\mathfrak{m}'^2}{b^2} + \dfrac{\mathfrak{n}'^2}{c^2}}. \tag{65}$$

Le nouveau coefficient $\mathfrak{f}$ d'absorption est donc une fonction rationnelle et homogène, du degré zéro, à numérateur et dénominateur linéaires, des six carrés l'^2, m'^2, n'^2, $\mathfrak{l}'^2$, $\mathfrak{m}'^2$, $\mathfrak{n}'^2$ des cosinus directeurs de la vibration, par rapport aux axes tant de l'ellipsoïde d'absorption que de l'onde courbe de Fresnel.

29. Cette expression peut, à raison de la petitesse des différences relatives existant, dans les corps, entre a, b et c, être remplacée par une autre seulement *approchée*, mais *entière*. Dans l'identité classique

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)$$
$$=(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')^2+(\beta\gamma'-\gamma\beta')^2+(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')^2+(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2,$$

faisons

$$\alpha=a\mathfrak{l}', \qquad \beta=b\mathfrak{m}', \qquad \gamma=c\mathfrak{n}',$$
$$\alpha'=\frac{\mathfrak{l}'}{a}, \qquad \beta'=\frac{\mathfrak{m}'}{b}, \qquad \gamma'=\frac{\mathfrak{n}'}{c}.$$

Le premier terme du second membre vaudra 1; et les trois derniers, devenus $\left(\frac{b}{c}-\frac{c}{b}\right)^2$, $\mathfrak{m}'^2\mathfrak{n}'^2$, ..., seront négligeables, comme étant du second ordre. On aura donc

$$(a^2\mathfrak{l}'^2+b^2\mathfrak{m}'^2+c^2\mathfrak{n}'^2)\left(\frac{\mathfrak{l}'^2}{a^2}+\frac{\mathfrak{m}'^2}{b^2}+\frac{\mathfrak{n}'^2}{c^2}\right)=1;$$

ce qui permettra bien de donner à l'expression (65) de $\mathfrak{f}$ la forme entière, très approchée,

$$\mathfrak{f}=(a^2\mathfrak{l}'^2+b^2\mathfrak{m}'^2+c^2\mathfrak{n}'^2)(\mathrm{a}'l'^2+\mathrm{b}'m'^2+\mathrm{c}'n'^2) \text{ [1]}. \tag{66}$$

30. Observons, en terminant, que nous nous sommes bornés aux vibrations dont les composantes ξ, η, ζ, pendulaires, peuvent se déduire de la solution symbolique (48) ou, à une première approximation, de la solution symbolique (27). Mais j'ai démontré, à la page 493 du Tome II de mon cours de la Sorbonne, que cela comprend, pour les corps translucides, toutes les ondes planes où le temps t

---

[1] La théorie générale de la translucidité appliquée ici aux phénomènes les plus simples de l'optique cristalline, a été exposée, dans ses principes, vers la fin du Tome, II cité plus haut, de mon *Cours de Physique mathématique* (p. 600 à 618; *voir* aussi p. 481 à 493); elle s'y trouve étendue aux phénomènes de dispersion et de polarisation rotatoire, de manière à expliquer, par exemple (p. 625) l'inégalité de l'absorption, par certains corps *actifs*, des deux rayons à vibrations circulaires de sens inverses, en lesquels ces corps dédoublent un rayon incident à vibrations rectilignes.

ne figure, dans les expressions de ξ, η, ζ, que par les cosinus et sinus d'un même arc, de la forme $k(t - lx - my - nz)$, avec coefficients proportionnels à une amplitude U fonction uniquement, du moins à une première approximation, de la distance $\lambda x + \mu y + \nu z$ à un plan fixe, qui est la face d'entrée de la lumière dans *le cristal*.

Et la démonstration s'y trouve étendue aux corps opaques, dans une considération finale que j'ai développée plus complètement à une Note de la page 9 de mon Mémoire sur l'absorption, inséré au numéro de mai 1905 du *Bulletin des Sciences Mathématiques*.

51. On voit, par les formules (14) et (65), combien était juste le double et merveilleux pressentiment de Fresnel, qui voulait que la vitesse de propagation et l'absorption de la lumière dépendissent *uniquement*, dans chaque corps homogène, *de la direction des vibrations*.

Ce pressentiment se vérifie plus complètement même que ne le pensait Fresnel, puisqu'il s'applique à la vitesse r de propagation et à l'extinction, suivant le rayon lumineux ou suivant le vrai sens de la transmission du mouvement, plutôt ou, du moins, plus simplement encore, qu'à la vitesse ω et à l'extinction suivant la normale aux ondes, comme le supposait Fresnel. Et l'on peut l'étendre à certains (tout au moins) des phénomènes de polarisation rotatoire, où les cosinus directeurs de la vitesse vibratoire changent sans cesse, à la condition de remplacer les carrés et produits de ces cosinus par leurs *valeurs moyennes* (¹).

Les mêmes formules montrent aussi que le choix, comme variables, des cosinus directeurs de la vibration, rend extrêmement simples et même élégantes certaines relations fondamentales de l'optique; ce qui pourrait suggérer l'idée de les employer parfois, dans des questions nouvelles où l'on serait embarrassé (²).

(¹) Même Tome II, p. 615 à 622.

(²) Dans le cas où les coefficients principaux $2a'$, $2b'$, $2c'$ des résistances proportionnelles aux vitesses vibratoires, cessant d'être très petits, deviendraient suffisants pour produire l'*opacité*, c'est-à-dire pour amener l'extinction sous des épaisseurs de quelques longueurs d'onde, les formules simples ci-dessus du cas de translucidité ne s'appliqueraient plus; et, par exemple, dans un milieu isotrope,

VI. — Réflexions sur la grandeur relative des longueurs d'onde que supposent nos équations du mouvement de l'éther dans les corps.

52. D'après l'analogie hydrodynamique qui nous a permis (p. 324) d'exprimer la résistance opposée par chaque molécule pondérable au mouvement de l'éther ambiant, l'accélération (ξ'', η'', ζ'') et la vitesse (ξ', η', ζ') dont dépend cette résistance sont celles, *censées communes*, de tout l'éther situé aux limites de la petite région où le mouvement vibratoire est troublé par la présence de la molécule, région d'un diamètre naturellement en rapport avec la grosseur des diverses molécules, mais *toujours beaucoup plus grand que le leur*. L'éther est donc, implicitement, supposé *à une même phase de son mouvement* sur toute une sphère entourant la région troublée; ce qui exige que le rayon d'une telle sphère soit négligeable par rapport à la longueur d'onde. Or il peut en être autrement quand les éléments des corps deviennent exceptionnellement grands, comme sont, par exemple, les molécules *intégrantes* de certains cristaux ou même les molécules *chimiques*, très complexes, de nombreux corps organiques.

Alors, sans doute, les dimensions des molécules dont il s'agit ne cessent pas de paraître comme infiniment petites à côté de la longueur d'onde; mais *le rayon des régions perturbées* peut lui devenir un peu comparable. Et cela suffit évidemment pour que la résistance de chaque molécule à l'éther ambiant comprenne, outre les termes ordi-

---

les rayons lumineux deviendraient obliques à leurs ondes, sauf sous l'incidence normale. Alors, par conséquent, la construction d'Huygens et de Fresnel, pour obtenir la direction de ces rayons par la jonction du centre de l'onde courbe enveloppe au point de contact de celle-ci avec l'onde plane tangente, cesserait d'être admissible. Bien plus, la forme des rayons lumineux ne serait plus rectiligne; et leur construction exigerait l'intégration d'une certaine équation aux dérivées partielles du second ordre, sous des conditions initiales que les relations définies propres à la face d'entrée rattacheraient aux mouvements incidents. Pour toutes ces questions intéressantes, à peine ébauchées jusqu'ici, on peut voir, relativement au cas des corps isotropes, les pages 583 à 587 du même Tome II, et, pour le cas général d'un corps homogène hétérotrope, c'est-à-dire d'un cristal opaque non cubique, les nos 7 à 10 du Mémoire, également cité plus haut (p. 321), qui a paru dans le Numéro de mai 1905 du *Bulletin des Sciences mathématiques*.

naires où figurent ξ'', η'', ζ'', ξ', η', ζ' évalués pour le centre de la molécule (abstraction faite de la perturbation), de minimes parties, proportionnelles aux dérivées en x, y, z de ξ'', η'', ζ'', ou même de ξ', η', ζ', et représentant les légères modifications introduites dans la résistance par la *disparité*, que ces dérivées mesurent, du mouvement de l'éther aux limites de la région troublée, ou par le petit désaccord en résultant, dans les impulsions que subit sur ses diverses faces la molécule.

Ces petits termes, quand des raisons de symétrie ne les annulent pas pour l'ensemble des molécules de l'élément de volume, expliquent la polarisation rotatoire ordinaire et la double réfraction elliptique, comme on voit aux pages 455 à 476, 611 et 625 du Tome II souvent cité ici.

55. Il ne subsistera même plus rien de nos expressions de la résistance, ni, par suite, des lois ordinaires de la réflexion et de la réfraction, si la longueur d'onde, se rapetissant dans un rapport énorme, devient seulement comparable aux dimensions d'une molécule, ou même plus petite; ce qui est probablement le cas des rayons X [1].

---

[1] *Voir*, à ce sujet, le n° 41 *bis* (p. 90 à 92) du Tome I du même cours de la Sorbonne sur la *Théorie analytique de la chaleur*, etc.

Les cinq premiers paragraphes du présent Mémoire ont été résumés dans trois Notes publiées aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CLII, 19 et 26 juin 1911, p. 1721 et 1808; t. CLIII, 3 juillet 1911, p. 16.

Sur les mouvements de Ribaucour décomposables;

PAR M. G. KOENIGS,

Professeur à la Sorbonne,
Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

1. Je me propose de faire connaître ici une propriété des surfaces quadriques déformées, que j'ai donnée en 1896 dans mes leçons au Collège de France, mais que je n'avais pas jusqu'ici publiée.

La position relative de deux corps solides S et S′ dépend, comme on sait, de six paramètres. Si entre ces six paramètres on établit un certain nombre de relations, les deux corps S et S′ se trouvent gênés dans leur position relative et constituent alors ce que j'ai appelé un *système binaire*. Si l'on suppose que les relations imposées aux six paramètres soient toutes des équations finies, c'est-à-dire non différentielles, et si elles laissent arbitraires l paramètres $[l < 6]$, le système binaire est dit avoir la *liberté* l.

Supposons alors un système binaire de liberté l, et soient S et S′ les deux corps solides qui le réalisent. Concevons qu'on puisse trouver un corps intermédiaire Σ tel que S et Σ forment un système binaire $\boxed{S\Sigma}$ de liberté $\lambda < l$, et soient $u_1, u_2, \ldots, u_\lambda$ les λ paramètres de position de ce système binaire. Supposons en même temps que le système binaire $\boxed{S'\Sigma}$ des corps S′ et Σ ait la liberté $l - \lambda = \lambda'$ et dépende des paramètres de position $v_1, v_2, \ldots, v_{\lambda'}$, différents des λ paramètres précédents. Nous disons, dans ces conditions, que le système binaire $\boxed{SS'}$ est DÉCOMPOSABLE dans les systèmes binaires $\boxed{S\Sigma}$ et $\boxed{S'\Sigma}$.

J'ai introduit cette considération des systèmes binaires décomposables, il y a longtemps, dans la théorie des mécanismes. Elle y correspond à des réalités mécaniques à la fois fréquentes et variées.

2. Le théorème que j'ai en vue concerne le cas d'un mouvement de Ribaucour, ou d'un système binaire de Ribaucour, à deux paramètres, ou de liberté 2, qui serait décomposable en deux mouvements, ou systèmes binaires de liberté 1.

On sait en quoi consiste un mouvement de Ribaucour. Il s'agit d'un système binaire $\boxed{SS'}$ à deux paramètres, dans lequel une surface [F], solidaire du corps S, roule sur une surface qui lui est *applicable* [F'], solidaire du corps S'.

Si l'on appelle O le point de contact des deux surfaces et Π leur plan tangent commun en ce point, tout déplacement infiniment petit du système binaire équivaut à une rotation autour d'un axe Δ issu du point O dans le plan Π, c'est-à-dire autour d'une tangente commune au point O aux deux surfaces.

3. Dans quel cas ce système binaire à deux paramètres est-il décomposable ?

S'il l'est, il existe un troisième corps Σ tel que les systèmes binaires $\boxed{S\Sigma}$, $\boxed{S'\Sigma}$ dépendent chacun d'un seul paramètre, u pour le premier, v pour le second (v indépendant de u), en sorte que u, v sont en définitive les deux paramètres du système binaire $\boxed{SS'}$.

Si on laisse v constant, le système binaire $\boxed{S'\Sigma}$ ne bouge pas, et, u variant seul, le mouvement du système binaire $\boxed{S\Sigma}$ est l'un des mouvements du système binaire $\boxed{SS'}$; c'est dire que le mouvement $\boxed{S\Sigma}$ admet à chaque instant une rotation tangente. Si donc on considère les deux surfaces réglées [Φ] et $[F_1]$ solidaires de Σ et de S qui virent l'une sur l'autre dans le système binaire $\boxed{S\Sigma}$, ces deux surfaces réglées sont applicables et roulent constamment sans glisser l'une sur l'autre.

Prenons alors les corps S et Σ dans une position correspondante à une valeur u de leur paramètre de position relative ; l'axe Δ_u de la rotation tangente afférente à cette époque est une droite de raccordement pour les surfaces $[\Phi]$ et $[F_1]$. Le point O de contact des surfaces déjà dénommées $[F]$ et $[F']$ est un point de cette droite. Si maintenant on fait varier le paramètre v en laissant fixe le paramètre u, la droite Δ_u reste fixe sur les surfaces $[\Phi]$ et $[F_1]$ et le point O, en variant, ne peut que décrire la droite Δ_u dans le corps S. Il est ainsi prouvé que l'axe Δ_u, en tant que lieu du point O, est tout entier tracé sur la surface $[F]$, et que, par suite, la surface $[F]$ contenant tout axe Δ_u, ne peut que coïncider avec $[F_1]$, que nous n'appellerons plus dès lors que $[F]$.

Supposons, au contraire, que nous considérions le système binaire $\boxed{S'\Sigma}$ dans une position correspondante à une valeur v du paramètre de ce système. L'axe Δ_v de la rotation tangente est encore la génératrice de raccordement de deux surfaces réglées applicables $[\Phi']$ et $[F'_1]$ solidaires de Σ et S', qui roulent l'une sur l'autre au cours de ce mouvement. Nous verrions comme tout à l'heure que $[F']$ doit coïncider avec $[F'_1]$ que nous n'appellerons plus que $[F']$.

D'autre part, si l'on observe que le point O de contact des surfaces $[F]$ $[F']$, dans la position afférente aux valeurs u, v des paramètres, doit être commun aux axes Δ_u et Δ_v, on reconnaît que toute génératrice de $[\Phi]$ doit couper toute génératrice de $[\Phi']$; par suite, $[\Phi]$ et $[\Phi']$ sont constitués par les deux systèmes de génératrices rectilignes d'une même quadrique $[Q]$, solidaire de Σ.

Les deux surfaces réglées $[F]$ et $[F']$ sont applicables sur cette quadrique, avec cette circonstance particulière que les génératrices rectilignes de $[F]$ correspondent aux génératrices d'un premier système $[\Phi]$ de $[Q]$; tandis que les génératrices rectilignes de $[F']$ correspondent aux génératrices du second système $[\Phi']$ de $[Q]$.

4. La solution du problème proposé est donc la suivante : Pour obtenir le mouvement de Ribaucour décomposable le plus général, on prend une quadrique $[Q]$ solidaire d'un corps solide Σ. On considère un corps S solidaire d'une surface réglée $[F]$ applicable sur $[Q]$ de façon que les génératrices rectilignes de $[F]$ correspondent aux génératrices d'un système $[\Phi]$ de $[Q]$. On prend ensuite un corps S', solidaire aussi d'une surface réglée $[F']$, également applicable sur $[Q]$, mais de telle sorte que ses génératrices rectilignes correspondent aux

génératrices rectilignes du second système [Φ′] de [Q]. En faisant rouler indépendamment l'une de l'autre [F] et [F′] sur [Q] on obtiendra deux corps S et S′ réalisant le système de Ribaucour cherché.

On voit que si l'on considère les axes Δ_u, Δ_v correspondants aux valeurs u, v des paramètres de position, le point de rencontre O des axes Δ_u et Δ_v sur [Q] sera aussi le point de contact des surfaces [F] et [F′] entre elles (¹).

Comme on sait que la détermination des surfaces telles que [F] [F′] ne dépend que des quadratures, on peut conclure que des quadratures suffisent également pour réaliser la représentation analytique du système binaire décomposable que nous venons de définir.

(¹) Pour cette détermination, *voir* G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. III, p. 293 et suiv.

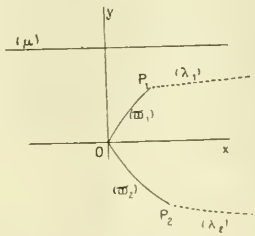
Sur le mouvement d'un solide donné dans un fluide limité par une paroi fixe;

Par M. H. VILLAT.

A Monsieur Marcel Brillouin,
Hommage de respectueuse admiration.
Janvier 1911.

Introduction. — J'ai déterminé dans ma Thèse [*Sur la résistance des fluides*, première Partie (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1911, p. 203)] l'intégrale générale du mouvement d'un solide dans un fluide plan limité par une paroi fixe (μ) rectiligne indéfinie, lorsque le fluide, dont la densité est prise pour unité, est supposé avoir

Fig. 1.

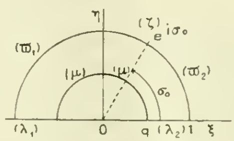


atteint un état irrotationnel permanent par rapport au corps (ce qui entraîne que le mouvement du solide se fasse parallèlement à la paroi). On admet en outre, conformément aux vues de Helmholtz, Kirchhoff, Levi-Cevità, la présence à l'arrière du solide d'un sillage fluide faisant corps avec lui, et limité par deux lignes de glissement (ou lignes libres) λ_1 et λ_2, le long desquelles le fluide en mouvement par rapport au corps glisse sur la portion fluide adhérant à celui-ci.

Je rappelle que, dans le plan du mouvement $z = x + iy$, nous avons pris comme origine O le point du profil de l'obstacle où le courant se divise pour venir entourer celui-ci, en suivant tout d'abord les portions ϖ_1 et ϖ_2 de la paroi, puis les lignes libres λ_1 et λ_2. Nous avons appelé 1 la vitesse du corps, et nous avons vu qu'il était permis, sans rien modifier d'essentiel au problème, de supposer le corps immobile, en donnant au fluide à l'infini la vitesse 1 (parallèle à la paroi μ).

Ceci rappelé, j'ai démontré que tous les éléments du mouvement s'exprimaient facilement au moyen d'une certaine variable auxiliaire ζ (sur le plan de laquelle le domaine du plan z, occupé par le fluide mobile par rapport au corps, est représenté sur la demi-couronne circulaire qu'indique la figure ci-dessous) et au moyen d'une fonction $\Omega(\zeta)$

Fig. 2.



de cette variable; cette fonction est assujettie à certaines conditions (*cf.* ma Thèse, p. 233) et présente la même généralité qu'une série de Laurent dont un coefficient sur deux serait arbitraire.

Une fois déterminée cette fonction $\Omega (= \Theta + i\mathrm{T})$ tous les éléments du mouvement en résultent; je donne ci-dessous les principaux résultats, renvoyant, pour leur démonstration, au Mémoire détaillé.

Parois ϖ_1 et ϖ_2 *de l'obstacle.*

$$(1) \quad x = -\mathrm{A}\frac{\omega}{\pi}(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)^2 \times \int_{\sigma_0}^{\sigma} e^{-\mathrm{T}} \cos\Theta \frac{\left[p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right) - p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)\right] p'\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\left[p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right) - e_3\right]\left[p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right) - e_2\right]\left[p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right) - e_3\right]^2} d\sigma,$$

$$(2) \quad y = -\mathrm{A}\frac{\omega}{\pi}(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)^2 \times \int_{\sigma_0}^{\sigma} e^{-\mathrm{T}} \sin\Theta \frac{\left[p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right) - p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)\right] p'\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\left[p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right) - e_3\right]\left[p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right) - e_2\right]\left[p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right) - e_3\right]^2} d\sigma.$$

Élément d'arc d'une paroi.

$$(3)\qquad d\varpi = -\frac{A\omega}{\pi}(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)^2 \times e^{-T} \frac{\left[p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right) - p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)\right] p'\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\left[p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right) - e_3\right]\left[p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right) - e_2\right]\left[p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right) - e_3\right]^2} d\sigma.$$

Résistance de l'obstacle.

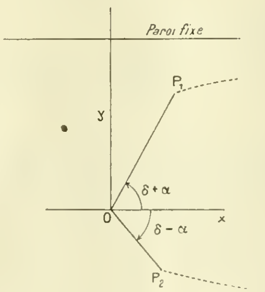
$$(4)\qquad P = \mathfrak{P}_x + i\mathfrak{P}_y = \frac{1}{2i}\int_{|\zeta|=1} e^{i\Omega}\, df.$$

Dans ces formules, p est la fonction elliptique de Weierstrass, aux périodes 2ω réelle, et $2\omega'$ imaginaire pure; et nous avons gardé les notations habituelles à la Théorie des Fonctions elliptiques [1]. Le rayon intérieur de la demi-couronne sus-indiquée est égal à

$$(5)\qquad q = e^{\frac{\pi\omega'}{i\omega}} < 1.$$

Ceci posé, nous avons reconnu que la fonction Ω correspondant à

Fig. 3.



un obstacle formé de deux lames issues du point O et faisant avec Ox

[1] Les notations adoptées dans ce Mémoire sont celles des Ouvrages fondamentaux sur les fonctions elliptiques (notamment APPELL et LACOUR, TANNERY et MOLK). D'autre part, nous espérons qu'aucune confusion n'est possible dans le texte, entre le point ζ, d'argument σ, et les fonctions elliptiques σ et ζ.

les angles $\delta \pm \alpha$, pouvait s'écrire, en posant

$$\zeta = \rho e^{i\sigma}, \tag{6}$$

$$\Omega_0^1 = \sum_1^\infty \mathrm{A}_n \operatorname{sh}\left(n \log \frac{q}{\rho}\right) \cos n\sigma - i \sum_1^\infty \mathrm{A}_n \operatorname{ch}\left(n \log \frac{q}{\rho}\right) \sin n\sigma$$

avec

$$\mathrm{A}_n = -\frac{4\alpha}{\pi} \frac{\sin n\sigma_0}{n \operatorname{sh}(n \log q)}$$

(*cf.* ma Thèse, p. 239); nous avons vu aussi que les constantes α, δ, σ_0 devaient vérifier la condition

$$(\delta - \alpha)\sigma_0 + (\delta + \alpha)(\pi - \sigma_0) = 0. \tag{7}$$

Je vais maintenant faire voir que cette fonction Ω_0^1 est susceptible de recevoir une forme très condensée, par l'intervention de certaines fonctions de la Théorie des Fonctions elliptiques.

Expression de la fonction Ω_0^1. — Observons tout d'abord qu'on a

$$\operatorname{sh}\left(n \log \frac{q}{\rho}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{q}{\rho}\right)^n - \left(\frac{\rho}{q}\right)^n\right], \qquad \operatorname{ch}\left(n \log \frac{q}{\rho}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{q}{\rho}\right)^n + \left(\frac{\rho}{q}\right)^n\right],$$

$$\operatorname{sh}(n \log q) = \frac{1}{2}\left(q^n - \frac{1}{q^n}\right).$$

Donc, nous pouvons écrire

$$\Omega_0^1 = \sum -\frac{4\alpha}{\pi} \frac{\sin n\sigma_0}{n} \rho^n \cos n\sigma \frac{1 - \left(\frac{q}{\rho}\right)^{2n}}{1 - q^{2n}} - \frac{4\alpha i}{\pi} \frac{\sin n\sigma_0}{n} \rho^n \sin n\sigma \frac{1 + \left(\frac{q}{\rho}\right)^{2n}}{1 - q^{2n}},$$

ce qu'on a évidemment le droit de mettre sous la forme

$$\begin{aligned} \Omega_0^1 = \sum & -\frac{4\alpha}{\pi} \frac{\sin n\sigma_0}{n(1 - q^{2n})} \rho^n (\cos n\sigma + i \sin n\sigma) \\ & + \frac{4\alpha}{\pi} \frac{\sin n\sigma_0}{n(1 - q^{2n})} \frac{q^{2n}(\cos n\sigma - i \sin n\sigma)}{\rho^n}, \end{aligned}$$

ou encore, en remarquant les formules, évidentes d'après (6),

$$\rho^n(\cos n\sigma + i \sin n\sigma) = \zeta^n; \qquad \frac{\cos n\sigma - i \sin n\sigma}{\rho^n} = \frac{1}{\zeta^n};$$

$$\Omega_0^1 = \sum -\frac{4\alpha}{\pi} \frac{\sin n\sigma_0}{n(1 - q^{2n})} \zeta^n + \sum \frac{4\alpha}{\pi} \frac{\sin n\sigma_0}{n(1 - q^{2n})} \frac{q^{2n}}{\zeta^n}. \tag{8}$$

De sorte qu'au fond la fonction Ω_0^1 se présente comme une série de Laurent, convergente dans la couronne circulaire étudiée dans ma

Thèse (exception faite de deux points $\zeta = e^{\pm i\sigma_0}$ de la frontière). Ce fait ne doit d'ailleurs pas étonner, d'après ce qui a été dit dans cette étude.

Pour la transformation que j'ai en vue je m'appuierai, dans ce qui va suivre, sur l'égalité

$$(9) \qquad -\frac{4\alpha}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin n\sigma_0}{n}\zeta^n = \frac{2\alpha i}{\pi}\log\frac{1-\zeta e^{-i\sigma_0}}{1-\zeta e^{i\sigma_0}}$$

(dans laquelle le logarithme qui figure au second membre est celui qui s'annule pour $\zeta = 0$ et qui est valable pour

$$|\zeta| \leqq 1,$$

exception faite des deux points $\zeta = e^{\pm i\sigma_0}$ de la frontière).

Cette égalité résulte de la formule

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} + \ldots$$

valable pour

$$|z| \leqq 1$$

exception faite de $z = -1$ (*cf.* Picard, *Analyse*, t. II, p. 75). Nous pouvons donc écrire, dans et sur la circonférence de rayon 1, sauf au point $\zeta = e^{-i\sigma_0}$,

$$\log(1-\zeta e^{i\sigma_0}) = -\zeta e^{i\sigma_0} - \frac{\zeta^2}{2}e^{2i\sigma_0} - \ldots - \frac{\zeta^n}{n}e^{ni\sigma_0} - \ldots.$$

Et de même, dans et sur la circonférence, sauf au point $\zeta = e^{i\sigma_0}$,

$$\log(1-\zeta e^{-i\sigma_0}) = -\zeta e^{-i\sigma_0} - \frac{\zeta^2}{2}e^{-2i\sigma_0} - \ldots - \frac{\zeta^n}{n}e^{-ni\sigma_0} - \ldots.$$

D'où, par soustraction et observant l'égalité évidente

$$e^{ni\sigma_0} - e^{-ni\sigma_0} = 2i\sin n\sigma_0,$$

la formule

$$\log(1-\zeta e^{i\sigma_0}) - \log(1-\zeta e^{-i\sigma_0}) = -2i\left(\zeta\sin\sigma_0 + \frac{\zeta^2}{2}\sin 2\sigma_0 + \ldots + \frac{\zeta^n}{n}\sin n\sigma_0 + \ldots\right)$$

ou encore

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin n\sigma_0}{n}\zeta^n = \frac{1}{2i}\log\frac{1-\zeta e^{-i\sigma_0}}{1-\zeta e^{i\sigma_0}},$$

c'est-à-dire la formule à démontrer (9).

Ce préliminaire établi, revenons à l'expression (8) de Ω_0^1, et considérons d'abord la première partie

$$(10) \qquad -\frac{4\alpha}{\pi}\sum_1^\infty \frac{\sin n\sigma_0}{n(1-q^{2n})}\zeta^n$$

qui est entière en ζ. Comme la quantité q est plus petite que l'unité, on a évidemment

$$(11) \qquad \frac{1}{1-q^{2n}} = 1+q^{2n}+q^{4n}+\ldots+q^{2pn}+\ldots.$$

De cette dernière égalité, et des règles de calcul des séries à double entrée, nous déduisons immédiatement que l'on a, pour $|\zeta|\leqq 1$, sauf toujours aux deux points $e^{\pm i\sigma_0}$,

$$\sum_n \frac{\sin n\sigma_0}{n(1-q^{2n})}\zeta^n = \sum_n\sum_p \frac{\sin n\sigma_0}{n} q^{2pn}\zeta^n,$$

ce qu'on a le droit d'ordonner comme il suit :

$$\sum_n \frac{\sin n\sigma_0}{n(1-q^{2n})}\zeta^n = \sum_n \frac{\sin n\sigma_0}{n}\zeta^n + \sum_n \frac{\sin n\sigma_0}{n}(q^2\zeta)^n+\ldots+\sum_n \frac{\sin n\sigma_0}{n}(q^{2p}\zeta)^n+\ldots$$

Mais alors, comme $|q^2\zeta|, |q^4\zeta|, \ldots$ sont inférieurs à 1 lorsque $|\zeta|$ est $\leqq 1$, la formule (9) ci-dessus démontrée nous donnera

$$(12) \quad -\frac{4\alpha}{\pi}\sum_1^\infty \frac{\sin n\sigma_0}{n(1-q^{2n})}\zeta^n = \frac{2\alpha i}{\pi}\left\{\log\frac{1-\zeta e^{-i\sigma_0}}{1-\zeta e^{i\sigma_0}} + \log\frac{1-q^2\zeta e^{-i\sigma_0}}{1-q^2\zeta e^{i\sigma_0}}+\ldots \right.$$
$$\left. + \log\frac{1-q^{2p}\zeta e^{-i\sigma_0}}{1-q^{2p}\zeta e^{i\sigma_0}}+\ldots\right\}.$$

Prenons maintenant la seconde partie de Ω_0^1, à savoir

$$\frac{4\alpha}{\pi}\sum_1^\infty \frac{\sin n\sigma_0}{n(1-q^{2n})}\frac{q^{2n}}{\zeta^n}.$$

D'une façon analogue, nous aurons

$$\sum_n \frac{\sin n\sigma_0}{n(1-q^{2n})}\frac{q^{2n}}{\zeta^n} = \sum_n\sum_p \frac{\sin n\sigma_0}{n} q^{2n+2pn}\frac{1}{\zeta^n}$$

assurément valable dans toute notre couronne circulaire, où $|\zeta|$ est toujours supérieur ou égal à q, et par suite à q^2, q^4, etc. Ensuite, nous ordonnerons le second membre comme il suit

$$\sum_n \frac{\sin n\sigma_0}{n(1-q^{2n})}\frac{q^{2n}}{\zeta^n} = \sum_n \frac{\sin n\sigma_0}{n}\left(\frac{q^2}{\zeta}\right)^n + \sum_n \frac{\sin n\sigma_0}{n}\left(\frac{q^4}{\zeta}\right)^n + \ldots + \sum_n \frac{\sin n\sigma_0}{n}\left(\frac{q^{2p}}{\zeta}\right)^n + \ldots.$$

Et comme, d'après ce qu'on vient de dire, $\left|\frac{q^2}{\zeta}\right|$, $\left|\frac{q^4}{\zeta}\right|$, etc. sont tous plus petits que 1 dans la couronne, l'égalité (9) nous donnera

$$(13)\quad \frac{4\alpha}{\pi}\sum_1^\infty \frac{\sin n\sigma_0}{n(1-q^{2n})}\frac{q^{2n}}{\zeta^n} = -\frac{2\alpha i}{\pi}\left\{\log\frac{1-\frac{q^2}{\zeta}e^{-i\sigma_0}}{1-\frac{q^2}{\zeta}e^{i\sigma_0}} + \log\frac{1-\frac{q^4}{\zeta}e^{-i\sigma_0}}{1-\frac{q^4}{\zeta}e^{i\sigma_0}} + \ldots + \log\frac{1-\frac{q^{2p}}{\zeta}e^{-i\sigma_0}}{1-\frac{q^{2p}}{\zeta}e^{i\sigma_0}} + \ldots\right\}.$$

Réunissant ces résultats, il est maintenant établi qu'on a dans la couronne

$$(14)\quad \Omega_0^1 = \left\{\frac{2\alpha i}{\pi}\log\frac{1-\zeta e^{-i\sigma_0}}{1-\zeta e^{i\sigma_0}} + \frac{2\alpha i}{\pi}\log\frac{1-q^2\zeta e^{-i\sigma_0}}{1-q^2\zeta e^{i\sigma_0}} + \ldots + \frac{2\alpha i}{\pi}\log\frac{1-q^{2p}\zeta e^{-i\sigma_0}}{1-q^{2p}\zeta e^{i\sigma_0}} + \ldots \right.$$
$$\left. - \frac{2\alpha i}{\pi}\log\frac{1-\frac{q^2}{\zeta}e^{-i\sigma_0}}{1-\frac{q^2}{\zeta}e^{i\sigma_0}} - \ldots - \frac{2\alpha i}{\pi}\log\frac{1-\frac{q^{2p}}{\zeta}e^{-i\sigma_0}}{1-\frac{q^{2p}}{\zeta}e^{i\sigma}} - \ldots\right\}.$$

Sous cette forme, on voit immédiatement que, si q devenait nul, la fonction Ω_0^1 se réduirait à celle que M. T. Levi-Cività a considérée dans sa théorie du fluide indéfini, et qu'il désigne par ω_0 (*cf.* son Mémoire *Scie e Leggi di resistenze*, § 10 et 11). Il est d'ailleurs possible de faire voir que l'hypothèse $q=0$ entraîne que la paroi μ est éloignée à l'infini (*cf.* ma Thèse, p. 309). On devait donc retomber, dans ce cas, sur le problème étudié par M. Levi-Cività.

La formule à laquelle nous venons de parvenir peut maintenant être écrite successivement sous les formes suivantes, toutes évidemment équivalentes :

$$\Omega_0^1 = \frac{2\alpha i}{\pi}\log\frac{1-\zeta e^{-i\sigma_0}}{1-\zeta e^{i\sigma_0}} + \frac{2\alpha i}{\pi}\lim_{(p=\infty)}\log\frac{(1-q^2\zeta e^{-i\sigma_0})(1-q^4\zeta e^{-i\sigma_0})\dots(1-q^{2p}\zeta e^{-i\sigma_0})}{(1-q^2\zeta e^{i\sigma_0})(1-q^4\zeta e^{i\sigma_0})\dots(1-q^{2p}\zeta e^{i\sigma_0})}$$
$$-\frac{2\alpha i}{\pi}\lim_{(p=\infty)}\log\frac{\left(1-\frac{q^2}{\zeta}e^{-i\sigma_0}\right)\left(1-\frac{q^4}{\zeta}e^{-i\sigma_0}\right)\dots\left(1-\frac{q^{2p}}{\zeta}e^{-i\sigma_0}\right)}{\left(1-\frac{q^2}{\zeta}e^{i\sigma_0}\right)\left(1-\frac{q^4}{\zeta}e^{i\sigma_0}\right)\dots\left(1-\frac{q^{2p}}{\zeta}e^{i\sigma_0}\right)}$$

ou

$$\Omega_0^1 = \frac{2\alpha i}{\pi}\log\frac{1-\zeta e^{-i\sigma_0}}{1-\zeta e^{i\sigma_0}}$$
$$+\frac{2\alpha i}{\pi}\lim_{(p=\infty)}\log\frac{(1-q^2\zeta e^{-i\sigma_0})\left(1-\frac{q^2}{\zeta}e^{i\sigma_0}\right)\dots(1-q^{2p}\zeta e^{-i\sigma_0})\left(1-\frac{q^{2p}}{\zeta}e^{i\sigma_0}\right)}{(1-q^2\zeta e^{i\sigma_0})\left(1-\frac{q^2}{\zeta}e^{-i\sigma_0}\right)\dots(1-q^{2p}\zeta e^{i\sigma_0})\left(1-\frac{q^{2p}}{\zeta}e^{-i\sigma_0}\right)}$$

ou enfin

$$\Omega_0^1 = \frac{2\alpha i}{\pi}\log\frac{1-\zeta e^{-i\sigma_0}}{1-\zeta e^{i\sigma_0}}$$
$$+\frac{2\alpha i}{\pi}\lim_{(p=\infty)}\log\left[\frac{1-q^2\left(\zeta e^{-i\sigma_0}+\frac{1}{\zeta e^{-i\sigma_0}}\right)+q^4}{1-q^2\left(\zeta e^{i\sigma_0}+\frac{1}{\zeta e^{i\sigma_0}}\right)+q^4}\right]\dots\left[\frac{1-q^{2p}\left(\zeta e^{-i\sigma_0}+\frac{1}{\zeta e^{-i\sigma_0}}\right)+q^{4p}}{1-q^{2p}\left(\zeta e^{i\sigma_0}+\frac{1}{\zeta e^{i\sigma_0}}\right)+q^{4p}}\right],$$

c'est-à-dire

$$(15)\quad \Omega_0^1 = \frac{2\alpha i}{\pi}\log\frac{1-\zeta e^{-i\sigma_0}}{1-\zeta e^{i\sigma_0}} + \frac{2\alpha i}{\pi}\log\frac{\prod_{p=1}^{p=\infty}\left[1-q^{2p}\left(\zeta e^{-i\sigma_0}+\frac{1}{\zeta e^{-i\sigma_0}}\right)+q^{4p}\right]}{\prod_{p=1}^{p=\infty}\left[1-q^{2p}\left(\zeta e^{i\sigma_0}+\frac{1}{\zeta e^{i\sigma_0}}\right)+q^{4p}\right]}$$

le symbole Π étant celui qui désigne un produit infini.

Or la Théorie des Fonctions elliptiques nous fournit des formules dans lesquelles interviennent de pareils produits infinis. Retenons pour l'instant particulièrement celle-ci (*cf.* Tannery et Molk, Form. XXIX) :

$$(15')\qquad \sigma u = \frac{2\omega}{\pi}\sin\frac{\pi}{2\omega}u\,\frac{e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}}{\prod_1^\infty(1-q^{2p})^2}\prod_1^\infty\left(1-2q^{2p}\cos\frac{\pi u}{\omega}+q^{4p}\right).$$

Nous pourrons identifier les deux trinomes

$$\left[1 - q^{2p}\left(\zeta\, e^{-i\sigma_0} + \frac{1}{\zeta\, e^{-i\sigma_0}}\right) + q^{4p}\right] \qquad \text{et} \qquad \left(1 - 2q^{2p}\cos\frac{\pi u}{\omega} + q^{4p}\right)$$

en posant

$$\zeta\, e^{-i\sigma_0} + \frac{1}{\zeta\, e^{-i\sigma_0}} = 2\cos\frac{\pi u}{\omega} = e^{\frac{i\pi u}{\omega}} + \frac{1}{e^{\frac{i\pi u}{\omega}}}.$$

Une des solutions de cette équation est

$$e^{\frac{i\pi u}{\omega}} = \zeta\, e^{-i\sigma_0}.$$

$\Bigg($L'autre solution s'en déduirait en changeant le signe de u, ce qui ne change rien au rapport $\dfrac{\sigma u}{\sin\dfrac{\pi}{2\omega}u}\cdot\Bigg)$

De là nous tirons

$$u = \frac{\omega}{\pi}\left(-\sigma_0 + \frac{1}{i}\log\zeta\right)$$

et ensuite la formule (15′) rappelée ci-dessus nous donne

$$(16)\qquad \prod_{p=1}^{p=+\infty}\left[1 - q^{2p}\left(\zeta\, e^{-i\sigma_0} + \frac{1}{\zeta\, e^{-i\sigma_0}}\right) + q^{4p}\right]$$
$$= \frac{\pi}{2\omega}\prod(1 - q^{2p})^2\,\frac{\sigma\left(\dfrac{\omega}{\pi}\sigma_0 + \dfrac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right)}{\sin\left(-\dfrac{\sigma_0}{2} + \dfrac{\log\zeta}{2i}\right)e^{\frac{\eta\omega}{2\pi^2}\left(-\sigma_0 + \frac{\log\zeta}{i}\right)^2}}.$$

Il suffit de changer le signe de σ_0 pour en conclure

$$(17)\qquad \prod_{p=1}^{p=+\infty}\left[1 - q^{2p}\left(\zeta\, e^{i\sigma_0} + \frac{1}{\zeta\, e^{i\sigma_0}}\right) + q^{4p}\right]$$
$$= \frac{\pi}{2\omega}\prod(1 - q^{2p})\,\frac{\sigma\left(\dfrac{\omega}{\pi}\sigma_0 + \dfrac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right)}{\sin\left(\dfrac{\sigma_0}{2} + \dfrac{\log\zeta}{2i}\right)e^{\frac{\eta\omega}{2\pi^2}\left(\sigma_0 + \frac{\log\zeta}{i}\right)^2}}.$$

Transportant dans l'expression (15) de Ω_0^1, et supprimant les facteurs communs, nous obtenons donc

$$(18)\qquad \Omega_0^1 = \frac{2\alpha i}{\pi}\log\frac{1-\zeta e^{-i\sigma_0}}{1-\zeta e^{i\sigma_0}} + \frac{2\alpha i}{\pi}\log\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta - \frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta + \frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)}\,\frac{\sin\left(\frac{\log\zeta}{2i}+\frac{\sigma_0}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\log\zeta}{2i}-\frac{\sigma_0}{2}\right)}\,e^{\frac{2\eta_1\omega\sigma_0}{\pi^2}\log\zeta}.$$

Nous pouvons encore simplifier cette expression. Observons en effet qu'on a

$$\frac{\sin\left(\frac{\log\zeta}{2i}+\frac{\sigma_0}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\log\zeta}{2i}-\frac{\sigma_0}{2}\right)} = \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\log\zeta}{2i}\right)+\operatorname{tang}\frac{\sigma_0}{2}}{\operatorname{tang}\left(\frac{\log\zeta}{2i}\right)-\operatorname{tang}\frac{\sigma_0}{2}}$$

et, d'après les formules d'Euler,

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\log\zeta}{2i}\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}\log\zeta}-e^{-\frac{1}{2}\log\zeta}}{i\left(e^{\frac{1}{2}\log\zeta}+e^{-\frac{1}{2}\log\zeta}\right)} = \frac{\zeta^{\frac{1}{2}}-\zeta^{-\frac{1}{2}}}{i\left(\zeta^{\frac{1}{2}}+\zeta^{-\frac{1}{2}}\right)} = \frac{\zeta-1}{i(\zeta+1)},$$

d'où encore

$$(19)\qquad \frac{\sin\left(\frac{\log\zeta}{2i}+\frac{\sigma_0}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\log\zeta}{2i}-\frac{\sigma_0}{2}\right)} = \frac{\zeta-1+i\operatorname{tang}\frac{\sigma_0}{2}(\zeta+1)}{\zeta-1-i\operatorname{tang}\frac{\sigma_0}{2}(\zeta+1)} = \frac{\zeta e^{\frac{i\sigma_0}{2}}-e^{-\frac{i\sigma_0}{2}}}{\zeta e^{-\frac{i\sigma_0}{2}}-e^{\frac{i\sigma_0}{2}}} = e^{-i\sigma_0}\frac{1-\zeta e^{i\sigma_0}}{1-\zeta e^{-i\sigma_0}}.$$

Donc il vient, en remplaçant dans (18) et supprimant les termes qui se détruisent,

$$(20)\qquad \Omega_0^1 = \frac{2\alpha i}{\pi}\log\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta - \frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta + \frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)} + \frac{4\alpha\eta_1\omega\sigma_0}{\pi^3}\log\zeta + \frac{2\alpha\sigma_0}{\pi}\quad [1].$$

Vérification. — Cette forme est notablement plus simple que la précédente; il est facile de vérifier après coup son exactitude, en constatant que la fonction de ζ ainsi définie satisfait bien à toutes les

[1] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 6 février 1911, t. 152, p. 304.

conditions voulues. Celles qui sont relatives à la continuité sont évidemment satisfaites ; voyons les conditions aux limites.

Sur la demi-circonférence supérieure $|\zeta| = 1$, la partie réelle de Ω' doit prendre les valeurs

$$\begin{array}{lll} \delta - \alpha & \text{si} & 0 < \varepsilon < \sigma_0 \\ \delta + \alpha & \text{si} & \sigma_0 < \varepsilon < \pi \end{array} \qquad (\zeta = e^{i\varepsilon}).$$

Or si nous faisons $\zeta = e^{i\varepsilon}$ dans l'expression (20), elle devient

$$(21) \qquad U = \frac{2\alpha i}{\pi} \log \frac{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)} + \frac{4\alpha\eta\omega\sigma_0}{\pi^3} i\varepsilon + \frac{2\alpha\sigma_0}{\pi}.$$

Or $\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)$ est négatif pour $0 < \varepsilon < \sigma_0$, et positif pour $\sigma_0 < \varepsilon < \pi$. De là, en nous rappelant la condition (7), qui peut d'ailleurs s'écrire

$$\frac{2\alpha\sigma_0}{\pi} = \delta + \alpha,$$

nous concluons immédiatement que la partie réelle de U est, pour $0 < \varepsilon < \sigma_0$,

$$\mathcal{R}\,U = \frac{2\alpha i}{\pi}(i\pi) + \frac{2\alpha\sigma_0}{\pi} = \frac{2\alpha\sigma_0}{\pi} - 2\alpha = \delta - \alpha$$

et, pour $\sigma_0 < \varepsilon < \pi$,

$$\mathcal{R}\,U = \frac{2\alpha\sigma_0}{\pi} = \delta + \alpha.$$

On retrouve donc bien les valeurs voulues.

La vérification est un peu moins simple, pour ce qui concerne la circonférence de rayon q, sur laquelle Ω'_0 doit prendre des valeurs imaginaires pures. Faisons $\zeta = qe^{i\varepsilon}$, et par suite

$$\log\zeta = \log q + i\varepsilon,$$

ou

$$\log\zeta = -\frac{\pi\omega'}{i\omega} + i\varepsilon,$$

en nous souvenant de la valeur (5) de q. Transportant dans Ω'_0, nous obtenons le résultat suivant

$$\mathrm{V} = \frac{2\alpha i}{\pi}\log\frac{\sigma\left(\omega' + \frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)}{\sigma\left(\omega' + \frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)} + \frac{4\alpha\eta\omega\sigma_0}{\pi^3}\left(-\frac{\pi\omega'}{i\omega} + i\varepsilon\right) + \frac{2\alpha\sigma_0}{\pi}.$$

Or on connaît la formule (*cf.* TANNERY et MOLK, *Fonct. ellipt.*, XII)

$$\sigma(u+\omega') = e^{\eta' u}\sigma\omega'\sigma_3 u.$$

D'où nous concluons

$$\frac{\sigma\left(\omega' + \frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)}{\sigma\left(\omega' + \frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)} = \frac{e^{\eta'\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon-\sigma_0)}\sigma_3\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon-\sigma_0)}{e^{\eta'\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon+\sigma_0)}\sigma_3\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon+\sigma_0)} = \frac{\sigma_3\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon-\sigma_0)}{\sigma_3\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon+\sigma_0)} \times e^{-\frac{2\eta'\omega\sigma_0}{\pi}}$$

et

$$(22) \qquad \mathrm{V} = \frac{2\alpha i}{\pi}\log\frac{\sigma_3\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon-\sigma_0)}{\sigma_3\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon+\sigma_0)} + \frac{2\alpha i}{\pi}\left(-\frac{2\eta'\omega\sigma_0}{\pi}\right) + \frac{4\alpha\eta\omega\sigma_0}{\pi^3}\left(-\frac{\pi\omega'}{i\omega} + i\varepsilon\right) + \frac{2\alpha\sigma_0}{\pi}.$$

Observant maintenant que le quotient $\dfrac{\sigma_3\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon-\sigma_0)}{\sigma_3\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon+\sigma_0)}$ est positif pour $-\pi < \varepsilon < \pi$, nous en déduisons que, sur la circonférence de rayon q, la partie réelle de Ω_0^1, c'est-à-dire de V, est

$$\frac{2\alpha i}{\pi}\left(-\frac{2\eta'\omega\sigma_0}{\pi}\right) - \frac{4\alpha\eta\sigma_0\omega'}{i\pi^2} + \frac{2\alpha\sigma_0}{\pi},$$

ou bien

$$\frac{2\alpha\sigma_0}{\pi}\left\{1 + \frac{2i}{\pi}(\eta\omega' - \eta'\omega)\right\},$$

résultat nul, si l'on tient compte de la formule classique

$$\eta\omega' - \eta'\omega = \frac{i\pi}{2}.$$

Enfin, on voit de suite que Ω_0^1 est réel lorsque ζ est sur l'axe réel. Il suffit en effet de remarquer que (en supposant $\zeta > 0$, pour fixer les idées) l'expression

$$\frac{2\alpha i}{\pi}\log\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta-\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta+\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)}$$

ne change pas si l'on change partout i en $-i$: car elle devient, en observant que σ est une fonction impaire,

$$-\frac{2\alpha i}{\pi}\log\frac{\sigma\left(-\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta-\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)}{\sigma\left(-\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta+\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)}=\frac{2\alpha i}{\pi}\log\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta-\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta+\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)}.$$

La fonction Ω_0^1, dont la partie imaginaire devient en outre infinie pour $\zeta=e^{\pm i\sigma_0}$, satisfait donc à toutes les conditions qui lui étaient imposées.

Ces vérifications n'étaient pas inutiles, puisque cette fonction Ω_0^1 va servir de base à la théorie que nous allons développer dans le Chapitre suivant.

Avant d'exposer cette théorie, je veux encore indiquer une forme pour Ω_0^1, équivalente à la forme (20), forme nouvelle qui nous sera utile ailleurs (¹), et qui se déduit en somme de la précédente, par les relations qui permettent de passer des fonctions de Weierstrass à celles de Jacobi et Hermite.

Autre expression de Ω_0^1. — Revenons à la formule (15), et observons que la théorie des fonctions H nous permet de calculer autrement les produits infinis étudiés ci-dessus. Avec la relation

$$q=e^{-\frac{\pi\omega'}{i\omega}}=e^{-\pi\frac{K'}{K}}, \tag{23}$$

définissant la liaison qui existe entre les périodes avec lesquelles on doit construire les nouvelles fonctions, on sait qu'on a (*cf.* Appell et Lacour, *Fonct. ellipt.*, p. 121)

$$H\left(\frac{2Ku}{\pi}\right)=A\,2q^{\frac{1}{4}}\sin u\prod_{p=1}^{p=\infty}[1-2q^{2p}\cos 2u+q^{4p}]$$

(¹) *Cf.* H. Villat, *Sur le mouvement discontinu d'un fluide dans un canal renfermant un obstacle* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1911 : à paraître).

avec

$$A = (1-q^2)(1-q^4)\dots(1-q^{2p})\dots.$$

Par suite, en posant

$$2\cos 2u = \zeta e^{i\sigma_0} + \frac{1}{\zeta e^{i\sigma_0}},$$

c'est-à-dire si l'on veut

$$u = \frac{\sigma_0}{2} + \frac{1}{2i}\log\zeta,$$

il vient

$$\prod_1^\infty \left[1 - q^{2p}\left(\zeta e^{i\sigma_0} + \frac{1}{\zeta e^{i\sigma_0}}\right) + q^{4p}\right] = \frac{H\left(\frac{K}{i\pi}\log\zeta + \frac{K}{\pi}\sigma_0\right)}{A\,2q^{\frac{1}{4}}\sin\left(\frac{\log\zeta}{2i} + \frac{\sigma_0}{2}\right)}.$$

De même, en changeant le signe de σ_0,

$$\prod_1^\infty \left[1 - q^{2p}\left(\zeta e^{-i\sigma_0} + \frac{1}{\zeta e^{-i\sigma_0}}\right) + q^{4p}\right] = \frac{H\left(\frac{K}{i\pi}\log\zeta - \frac{K}{\pi}\sigma_0\right)}{A\,2q^{\frac{1}{4}}\sin\left(\frac{\log\zeta}{2i} - \frac{\sigma_0}{2}\right)}.$$

Donc enfin

$$(24) \qquad \Omega_0^1 = \frac{2\alpha i}{\pi}\log\frac{1-\zeta e^{-i\sigma_0}}{1-\zeta e^{i\sigma_0}} + \frac{2\alpha i}{\pi}\log\left[\frac{H\left(\frac{K}{i\pi}\log\zeta - \frac{K}{\pi}\sigma_0\right)}{H\left(\frac{K}{i\pi}\log\zeta + \frac{K}{\pi}\sigma_0\right)}\,\frac{\sin\left(\frac{\log\zeta}{2i} + \frac{\sigma_0}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\log\zeta}{2i} - \frac{\sigma_0}{2}\right)}\right],$$

ce qui, d'après la valeur (19) trouvée antérieurement pour le quotient $\dfrac{\sin\left(\frac{\log\zeta}{2i} + \frac{\sigma_0}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\log\zeta}{2i} - \frac{\sigma_0}{2}\right)}$, se réduit à la forme définitive

$$(25) \qquad \Omega_0^1 = \frac{2\alpha i}{\pi}\log\frac{H\left(\frac{K}{i\pi}\log\zeta - \frac{K}{\pi}\sigma_0\right)}{H\left(\frac{K}{i\pi}\log\zeta + \frac{K}{\pi}\sigma_0\right)} + \frac{2\alpha\sigma_0}{\pi}.$$

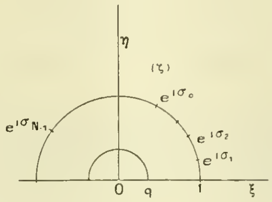
Étude du cas où l'obstacle a une forme donnée.

Cas d'un obstacle polygonal. — Considérons tout d'abord un obstacle polygonal, dont les côtés, en nombre N, fassent avec Ox les angles θ_1, θ_2, ..., θ_n, respectivement; et soient

$$0,\quad \sigma_1,\quad \sigma_2,\quad \ldots,\quad \sigma_p(=\sigma_0),\quad \ldots,\quad \sigma_{N-1},\quad \pi,$$

les arguments des points de la demi-circonférence $|\zeta| = 1$ correspondant dans le plan ζ, aux sommets de ce polygone. De sorte que, sur les

Fig. 4.



arcs successifs $(1, e^{i\sigma_1})$, $(e^{i\sigma_1}, e^{i\sigma_2})$, ... de cette demi-circonférence, la partie réelle de la fonction Ω_0 particulière correspondant au polygone, devra prendre les valeurs constantes θ_1, θ_2, ...

Dans ces conditions, j'ai démontré dans ma Thèse (p. 249) qu'on pouvait écrire $[\zeta = \rho e^{i\sigma}]$

$$(26) \qquad \Omega_0 = \sum_1^{\infty} \left\{ A_n \operatorname{sh}\left(n \log \frac{q}{\rho}\right) \cos n\sigma - i A_n \operatorname{ch}\left(n \log \frac{q}{\rho}\right) \sin n\sigma \right\},$$

les coefficients A_n étant donnés par les relations

$$A_n = \frac{2}{\pi n \operatorname{sh}(n \log q)} [\theta \sin n\sigma_1 + \theta_2(\sin n\sigma_2 - \sin n\sigma_1) + \ldots - \theta_N \sin n\sigma_{N-1}].$$

Il est à peine besoin de faire remarquer que, si le contour polygonal n'est pas concave vers le courant, la solution que nous développons n'a pour le moment aucun sens du point de vue hydrodynamique : car le fluide quitterait le contact avec la paroi dès qu'il atteindrait un sommet du polygone où ce fait se produirait. Comme le calcul actuel n'est destiné à nous servir *que comme intermédiaire purement analytique*, ainsi qu'on s'en rendra compte plus loin, nous n'insisterons pas sur ce point, la difficulté qui en résulte devant être levée *a posteriori*.

Cette remarque faite, observons qu'on peut évidemment écrire A_n sous la forme

$$(27)\quad A_n = \frac{2}{\pi n \operatorname{sh}(n \log q)}\big[(\theta_1-\theta_2)\sin n\sigma_1 + (\theta_2-\theta_3)\sin n\sigma_2 + \ldots + (\theta_p-\theta_{p+1})\sin n\sigma_p + \ldots + (\theta_{N-1}-\theta_N)\sin n\sigma_{N-1}\big].$$

Or la substitution, dans (26), de la portion

$$\frac{2}{\pi n \operatorname{sh}(n \log q)}(\theta_1-\theta_2)\sin n\sigma_1,$$

de A_n, fournirait, d'après le Chapitre précédent, une fonction qu'on pourrait déduire de Ω'_0 en y remplaçant 2α par $\theta_2-\theta_1$ et σ_0 par σ_1.

De cette importante remarque, il résulte qu'en prenant Ω'_0 par exemple sous la forme (18), la fonction Ω_0 correspondant à notre polygone est

$$
\begin{aligned}
(28)\quad \Omega_0 = {} & \frac{i(\theta_2-\theta_1)}{\pi}\log\frac{1-\zeta e^{-i\sigma_1}}{1-\zeta e^{i\sigma_1}} \\
& + \frac{i(\theta_2-\theta_1)}{\pi}\times\left\{\log\left[\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta-\frac{\omega}{\pi}\sigma_1\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta+\frac{\omega}{\pi}\sigma_1\right)}\,\frac{\sin\left(\frac{\log\zeta}{2i}+\frac{\sigma_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\log\zeta}{2i}-\frac{\sigma_1}{2}\right)}\right]+\frac{2\eta_1\omega\sigma_1}{i\pi^2}\log\zeta\right\} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{i(\theta_{p+1}-\theta_p)}{\pi}\log\frac{1-\zeta e^{-i\sigma_p}}{1-\zeta e^{i\sigma_p}} \\
& + \frac{i(\theta_{p+1}-\theta_p)}{\pi}\times\left\{\log\left[\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta-\frac{\omega}{p}\sigma_p\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta+\frac{\omega}{\pi}\sigma_p\right)}\,\frac{\sin\left(\frac{\log\zeta}{2i}+\frac{\sigma_p}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\log\zeta}{2i}-\frac{\sigma_p}{2}\right)}\right]+\frac{2\eta_1\omega\sigma_p}{i\pi^2}\log\zeta\right\} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{i(\theta_N-\theta_{N-1})}{\pi}\log\frac{1-\zeta e^{-i\sigma_{N-1}}}{1-\zeta e^{i\sigma_{N-1}}} \\
& + \frac{i(\theta_N-\theta_{N-1})}{\pi}\times\left\{\log\left[\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta-\frac{\omega}{\pi}\sigma_{N-1}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta+\frac{\omega}{\pi}\sigma_{N-1}\right)}\,\frac{\sin\left(\frac{\log\zeta}{2i}+\frac{\sigma_{N-1}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\log\zeta}{2i}-\frac{\sigma_{N-1}}{2}\right)}\right]+\frac{2\eta_1\omega\sigma_{N-1}}{i\pi^2}\log\zeta\right\}.
\end{aligned}
$$

Enfin il ne faut pas omettre de rappeler que les constantes $\sigma_1, \ldots \sigma_{N-1}$, et $\theta_1, \ldots, \theta_N$ sont liées par la relation

$$(29) \qquad \theta_1\sigma_1 + \theta_2(\sigma_2 - \sigma_1) + \ldots + \theta_N(\pi - \sigma_{N-1}) = 0$$

(*cf.* Thèse, p. 249 et p. 302).

Nous avons pris pour Ω_0^1 l'expression (18) [légèrement moins simple que l'expression (20)], pour avoir l'occasion de retrouver à titre de vérification, dans le courant du calcul qui va suivre, l'expression de la fonction Ω qui convient à un contour donné, dans le cas du fluide indéfini, expression que j'ai déjà déterminée directement ailleurs (*cf.* Thèse, 2e Partie).

Ceci posé, imaginons que nous partions d'un polygone tel que celui dont il vient d'être parlé, et que nous fassions croître indéfiniment le nombre des côtés de ce polygone, la longueur de chaque côté tendant vers zéro, de manière qu'à la limite cette ligne tende vers une courbe donnée. Dans ces conditions, la suite $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{N-1}, \pi$, des valeurs de σ deviendra une suite continue variant de 0 à π; et la succession des valeurs $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{N-1}$ de θ deviendra elle aussi une succession continue, sauf peut-être à la proue de l'obstacle, qui dans ce qui précède correspondait à $\sigma = \sigma_p = \sigma_0$. Pour ne pas compliquer les notations, nous continuerons à nommer σ_0 la valeur de σ correspondant à la proue de l'obstacle auquel on parvient comme cas limite (bien que l'argument relatif à cette proue ait pu varier pendant la déformation du polygone).

Enfin, nous écrirons sous la forme

$$(30) \qquad \theta = \Phi(\sigma)$$

la relation qui existe, dans la courbe limite, entre l'inclinaison θ de la tangente en un point (dans le sens du courant) et l'argument σ du point correspondant sur la circonférence $|\zeta| = 1$ dans la représentation sur demi-couronne. Si le profil de l'obstacle est continu et doué d'une tangente variant d'une façon continue ainsi que la courbure (sauf exception possible à la proue, pour $\sigma = \sigma_0$), la fonction $\Phi(\sigma)$ sera continue, sauf pour $\sigma = \sigma_0$; pour cette valeur de σ, $\Phi(\sigma)$ tendra vers $\Phi(\sigma_0 - 0)$ ou $\Phi(\sigma_0 + 0)$ suivant qu'on arrivera vers σ_0 par valeurs inférieures ou supérieures : ces deux valeurs limites sont du reste égales aux angles que font avec Ox les tangentes en O au profil de l'obstacle. Enfin, $\Phi(\sigma)$ possédera une dérivée pouvant être discontinue pour $\sigma = \sigma_0$ [1].

Nous verrons que $\Phi(\sigma)$ est la fonction arbitraire dont dépend tout le problème.

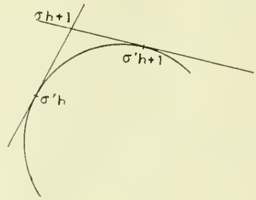
Il résulte de la relation (29) considérée à la limite, que cette fonction satisfait nécessairement à la condition

$$\int_0^{\pi} \Phi(\sigma)\, d\sigma = 0, \tag{31}$$

sur l'établissement de laquelle je n'insiste pas, puisque aussi bien cette condition a été établie directement dans ma Thèse (p. 302).

Ceci posé, admettons, pour fixer les idées, que notre polygone variable soit circonscrit à la courbe vers laquelle il tend; alors, $\sigma_1 \sigma_2, \ldots$ étant toujours les valeurs de σ correspondant aux sommets du polygone

Fig. 5.



dans la représentation sur demi-couronne, qui convient à ce polygone, appelons $\sigma'_1, \sigma'_2, \ldots$ les valeurs de σ qui correspondent aux points de contact dans la représentation qui convient à la courbe continue. De sorte que, dans la représentation relative au polygone, on a tout le long de l'arc $e^{i\sigma_h}, e^{i\sigma_{h+1}}$,

$$\theta_{h+1} = \text{const.} = \Phi(\sigma'_h),$$

et par suite

$$\theta_{h+1} - \theta_h = \Phi(\sigma'_h) - \Phi(\sigma'_{h-1}).$$

(1) Ces hypothèses (entre autres la continuité de Φ et l'existence de sa dérivée), qui se rattachent naturellement aux conditions physiques du problème traité, ne sont nullement nécessaires pour la validité des résultats qui seront obtenus plus loin, et notamment de la formule (A) et de la formule (51). *Voir* à ce sujet notre Note *Sur le problème de Dirichlet relatif à une couronne circulaire* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 13 mars 1911), et le Mémoire détaillé (*à paraître prochainement*).

De là, et du fait *probable* qu'à la limite les trois quantités σ_h, σ'_h, σ'_{h-1}, deviennent égales, nous concluons que l'expression (28) de Ω_0 tend bien probablement vers une limite que nous allons écrire, et dans laquelle certaines intégrales définies interviennent tout naturellement : ce fait tient à ce que toutes les différences $\theta_{h+1}-\theta_h$ tendent vers zéro, à part la suivante

$$\theta_{p+1}-\theta_p,$$

dont la limite est

$$\Phi(\sigma_0+0)-\Phi(\sigma_0-0).$$

Envisageons donc dans la valeur (28) de Ω_0 le premier terme et les termes analogues, ne faisant pas intervenir la fonction σ'. Ces termes groupés donnent vraisemblablement naissance à la limite suivante :

$$(32)\quad \begin{aligned} \mathrm{S} = {} & \frac{i}{\pi}\int_0^{\sigma_0-0}\Phi'(\sigma)\log\frac{1-\zeta e^{-i\sigma}}{1-\zeta e^{i\sigma}}\,d\sigma+\frac{i}{\pi}\int_{\sigma_0+0}^{\pi}\Phi'(\sigma)\log\frac{1-\zeta e^{-i\sigma}}{1-\zeta e^{i\sigma}}\,d\sigma \\ & +\frac{i}{\pi}[\Phi(\sigma_0+0)-\Phi(\sigma_0-0)]\log\frac{1-\zeta e^{-i\sigma_0}}{1-\zeta e^{i\sigma_0}}, \end{aligned}$$

expression qui a un sens quel que soit ζ dans la couronne connue du plan ζ, et sur les bords. La transformation que je vais en faire n'est plus valable sur le bord extérieur.

Une intégration par parties permet d'écrire après simplifications faciles

$$\int\Phi'(\sigma)\log\frac{1-\zeta e^{-i\sigma}}{1-\zeta e^{i\sigma}}\,d\sigma=\left[\Phi(\sigma)\log\frac{1-\zeta e^{-i\sigma}}{1-\zeta e^{i\sigma}}\right]-\int\Phi(\sigma)\,\frac{2i\zeta(\cos\sigma-\zeta)}{1-2\zeta\cos\sigma+\zeta^2}\,d\sigma.$$

Appliquons cette formule aux deux intervalles 0, σ_0-0; σ_0+0, π. Il vient

$$\begin{aligned} & \int_0^{\sigma_0-0}\Phi'(\sigma)\log\frac{1-\zeta e^{-i\sigma}}{1-\zeta e^{i\sigma}}\,d\sigma \\ & \quad =\Phi(\sigma_0-0)\log\frac{1-\zeta e^{-i\sigma_0}}{1-\zeta e^{i\sigma_0}}-\int_0^{\sigma_0-0}\Phi(\sigma)\,\frac{2i\zeta(\cos\sigma-\zeta)}{1-2\zeta\cos\sigma+\zeta^2}\,d\sigma, \\ & \int_{\sigma_0+0}^{\pi}\Phi'(\sigma)\log\frac{1-\zeta e^{i\sigma}}{1-\zeta e^{-i\sigma}}\,d\sigma \\ & \quad =-\Phi(\sigma_0+0)\log\frac{1-\zeta e^{-i\sigma_0}}{1-\zeta e^{i\sigma_0}}-\int_{\sigma_0+0}^{\pi}\Phi(\sigma)\,\frac{2i\zeta(\cos\sigma-\zeta)}{1-2\zeta\cos\sigma+\zeta^2}\,d\sigma. \end{aligned}$$

Transportant dans S et simplifiant, nous avons

$$\mathrm{S}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\Phi(\sigma)\,\frac{2\zeta\cos\sigma-2\zeta^2}{1-2\zeta\cos\sigma+\zeta^2}\,d\sigma.$$

A cause de la formule (31), ceci peut s'écrire

$$S = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Phi(\sigma)\left(\frac{2\zeta\cos\sigma - 2\zeta^2}{1 - 2\zeta\cos\sigma + \zeta^2} + 1\right) d\sigma.$$

c'est-à-dire

$$S = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Phi(\sigma)\,\frac{1-\zeta^2}{1 - 2\zeta\cos\sigma + \zeta^2}\, d\sigma. \tag{33}$$

Ce qui est exactement l'expression de Ω qui convient au cas du fluide indéfini, comme je l'ai montré ailleurs. Cela devait être, puisqu'en ne conservant dans Ω_0^1 que le premier terme, on obtenait la fonction correspondant au fluide indéfini avec un obstacle formé de deux segments rectilignes (*cf.* infra, p. 359).

Prenons maintenant dans (28) les termes que nous avons négligés jusqu'ici. En posant

$$U(\sigma) = \log \frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta - \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta + \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}\,\frac{\sin\left(\frac{\log\zeta}{2i} + \frac{\sigma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\log\zeta}{2i} - \frac{\sigma}{2}\right)} + \frac{2\eta\omega\sigma}{i\pi^2}\log\zeta, \tag{34}$$

il est vraisemblable que la limite de cette somme de termes est

$$\begin{aligned} S_1 = {} & \frac{i}{\pi}\int_0^{\sigma_0 - 0} \Phi'(\sigma)\,U(\sigma)\,d\sigma \\ & + \frac{i}{\pi}\int_{\sigma_0+0}^{\pi} \Phi'(\sigma)\,U(\sigma)\,d\sigma + \frac{i}{\pi}[\Phi(\sigma_0 + 0) - \Phi(\sigma_0 - 0)]\,U(\sigma_0), \end{aligned} \tag{35}$$

expression qui a un sens dans tout le domaine du plan ζ; la transformation qui suit n'est plus valable sur le bord extérieur.

On peut écrire

$$\int \Phi'(\sigma)\,U(\sigma)\,d\sigma = [\Phi(\sigma)\,U(\sigma)] - \int \Phi(\sigma)\,U'(\sigma)\,d\sigma. \tag{36}$$

Observons ensuite qu'on a

$$U(0) = 0$$

et

$$\mathrm{U}(\pi) = \log \frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta - \omega\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta + \omega\right)} \frac{\sin\left(\frac{\log\zeta}{2i} + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\log\zeta}{2i} - \frac{\pi}{2}\right)} + \frac{2\eta\omega}{i\pi}\log\zeta.$$

Mais (Tannery et Molk, XII)

$$\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta + \omega\right) = \sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta - \omega + 2\omega\right) = -e^{2\eta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right)}\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta - \omega\right).$$

De là immédiatement

$$\mathrm{U}(\pi) = \log \frac{1}{e^{\frac{2\eta\omega}{i\pi}\log\zeta}} + \frac{2\eta\omega}{i\pi}\log\zeta = 0.$$

Appliquant alors la relation (36) aux deux intervalles $0, \sigma_0 - 0$; $\sigma_0 + 0, \pi$, il vient

$$\int_0^{\sigma_0 - 0} \Phi'(\sigma)\,\mathrm{U}(\sigma)\,d\sigma = \Phi(\sigma_0 - 0)\,\mathrm{U}(\sigma_0) - \int_0^{\sigma_0 - 0} \Phi(\sigma)\,\mathrm{U}'(\sigma)\,d\sigma,$$

$$\int_{\sigma_0 + 0}^{\pi} \Phi'(\sigma)\,\mathrm{U}(\sigma)\,d\sigma = -\Phi(\sigma_0 + 0)\,\mathrm{U}(\sigma_0) - \int_{\sigma_0 + 0}^{\pi} \Phi(\sigma)\,\mathrm{U}'(\sigma)\,d\sigma.$$

Transportant dans S_1, nous avons enfin

$$(37) \qquad S_1 = -\frac{i}{\pi}\int_0^{\pi} \Phi(\sigma)\,\mathrm{U}'(\sigma)\,d\sigma.$$

Voyons maintenant quelle est la valeur de $\mathrm{U}'(\sigma)$. En nous rappelant que $\frac{\sigma' u}{\sigma u} = \zeta u$, un calcul facile nous donne

$$(38) \qquad \mathrm{U}'(\sigma) = -\frac{\omega}{\pi}\left[\zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta - \frac{\omega}{\pi}\sigma\right) + \zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta + \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)\right]$$
$$+ \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{\log\zeta}{i}\right)}{\sin\left(\frac{\log\zeta}{2i} + \frac{\sigma}{2}\right)\sin\left(\frac{\log\zeta}{2i} - \frac{\sigma}{2}\right)} + \frac{2\eta\omega}{i\pi^2}\log\zeta.$$

Or on a, d'une part (Tannery et Molk, VII; Appell et Lacour, p. 51),

$$(39)\quad \zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta - \frac{\omega}{\pi}\sigma\right) + \zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta + \frac{\omega}{\pi}\sigma\right) = 2\zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right) + \frac{p'\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right)}{p\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right) - p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)},$$

et d'autre part

$$\sin\left(\frac{\log\zeta}{i}\right) = -\frac{1-\zeta^2}{2i\zeta},$$

$$2\sin\left(\frac{\log\zeta}{2i} + \frac{\sigma}{2}\right)\sin\left(\frac{\log\zeta}{2i} - \frac{\sigma}{2}\right) = \cos\sigma - \cos\left(\frac{\log\zeta}{i}\right) = \frac{1 - 2\zeta\cos\sigma + \zeta^2}{-2\zeta}.$$

De sorte que finalement il vient

$$(40)\quad S_1 = -\frac{i}{\pi}\int_0^\pi \Phi(\sigma)\left\{-\frac{\omega}{\pi}\left[2\zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right) + \frac{p'\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right)}{p\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right) - p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}\right] + \frac{1-\zeta^2}{i(1-2\zeta\cos\sigma+\zeta^2)} + \frac{2\eta\omega}{i\pi^2}\log\zeta\right\}d\sigma.$$

De là, en transportant dans Ω_0 et supprimant la partie commune,

$$(41)\quad \Omega = \lim\Omega_0 = S + S_1 = \frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^\pi \Phi(\sigma)\left[2\zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right) - \frac{2\eta}{i\pi}\log\zeta + \frac{p'\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right)}{p\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right) - p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}\right]d\sigma.$$

Ce qui, à cause de la condition (31), se réduit à

$$(42)\quad \Omega(\zeta) = \frac{i\omega}{\pi^2}p'\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right)\int_0^\pi \Phi(\sigma)\frac{d\sigma}{p\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right) - p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}.$$

Remarquons qu'en posant

$$(43)\quad \frac{\omega}{\pi}\sigma = s, \qquad \Phi(\sigma) = \Psi(s),$$

la formule précédente peut encore s'écrire

$$(44) \qquad \Omega(\zeta) = \frac{i}{\pi} \int_0^{\omega} \Psi(s) \frac{p'\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right)}{p\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right) - ps} ds,$$

avec la condition

$$(45) \qquad \int_0^{\omega} \Psi(s)\, ds = 0.$$

La légitimité du résultat que nous venons d'obtenir est loin d'être assurée. Cette légitimité résultera de l'étude approfondie que nous ferons de la fonction $\Omega(\zeta)$ définie par la formule (42), dans le prochain Chapitre.

Il ne manque pas d'intérêt de remarquer immédiatement que l'application, sans autre forme de procès, de cette formule (42), au cas de l'obstacle formé de deux segments rectilignes, nous redonnera bien pour Ω l'expression Ω_0^1 dont nous étions partis.

Faisons en effet

$$\Phi(\sigma) = \delta - \alpha \quad \text{pour} \quad 0 < \sigma < \sigma_0,$$
$$\Phi(\sigma) = \delta + \alpha \quad \text{pour} \quad \sigma_0 < \sigma < \pi,$$

et calculons la fonction correspondante

$$\Omega = \frac{i\omega}{\pi^2}\left[\int_0^{\sigma_0} (\delta - \alpha) \frac{p'\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right)}{p\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right) - p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)} d\sigma + \int_{\sigma_0}^{\pi} (\delta + \alpha) \frac{p'\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right)}{p\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right) - p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)} d\sigma \right],$$

où les constantes σ_0, α, δ, sont liées par la relation

$$(46) \qquad (\delta - \alpha)\sigma_0 + (\delta + \alpha)(\pi - \sigma_0) = 0,$$

qui n'est autre que la condition (31). A cause de

$$\frac{p'\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right)}{p\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right) - p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)} = \zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta - \frac{\omega}{\pi}\sigma\right) + \zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta + \frac{\omega}{\pi}\sigma\right) - 2\zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right),$$

il vient pour l'intégrale indéfinie

$$\frac{\omega}{\pi}\int\frac{p'\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right)}{p\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right)-p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}\,d\sigma=\log\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta+\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta-\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}-2\,\frac{\omega}{\pi}\sigma\zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right)$$

Et par suite

$$\begin{aligned}\Omega = {} & \frac{i}{\pi}(\delta-\alpha)\left[\log\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta+\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta-\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)}-2\zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right)\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right]\\ & +\frac{i}{\pi}(\delta+\alpha)\left\{\log\left[\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta+\omega\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta-\omega\right)}\,\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta-\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta+\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)}\right]\right.\\ & \left.\qquad\qquad -2\zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right)(\pi-\sigma_0)\frac{\omega}{\pi}\right\}.\end{aligned}$$

Le terme de $\zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right)$ disparaît par suite de (46); on a d'autre part (Tannery et Molk, XII)

$$\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta+\omega\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta-\omega\right)}=-e^{\frac{2\eta_1\omega}{i\pi}\log\zeta},$$

et de la relation (46), on tire

$$\delta+\alpha=\frac{2\alpha\sigma_0}{\pi},\qquad \delta-\alpha=-\frac{2\alpha}{\pi}(\pi-\sigma_0)=\frac{2\alpha\sigma_0}{\pi}-2\alpha.$$

Donc la fonction Ω obtenue se met finalement sous la forme

$$\begin{aligned}\Omega = {} & \frac{2\alpha i}{\pi}\left(\frac{\sigma_0}{\pi}-1\right)\log\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta+\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta-\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)}\\ & +\frac{2\alpha i\sigma_0}{\pi^2}\log\left[\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta-\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta+\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)}(-1)\,e^{+\frac{2\eta_1\omega\log\zeta}{i\pi}}\right],\end{aligned}$$

ou encore

$$\Omega = \frac{2\alpha i}{\pi} \log \frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta - \frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta + \frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)} + \frac{4\alpha\eta\omega\sigma_0}{\pi^3}\log\zeta + \frac{2\alpha\sigma_0}{\pi}.$$

On retrouve donc bien la fonction Ω_0^1 primitive, ce que nous voulions vérifier.

Les deux formes de la fonction Ω. — En résumé, dans ce Chapitre, nous avons obtenu pour Ω la forme

$$\text{(A)} \qquad \Omega(\zeta) = \frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^\pi \Phi(\sigma)\frac{p'\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right)}{p\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right) - p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}d\sigma \quad (^1)$$

valable dans la couronne circulaire du plan ζ, sauf sur la frontière extérieure. Cette forme sera, pour les applications, de la dernière importance. Mais, des formules (32), (34), (35), il résulte une autre expression de Ω, qui sera valable *partout*, y compris sur la circonférence $|\zeta| = 1$, et qui dans le domaine, sauf sur cette circonférence, sera exactement équivalente à l'expression (A). Cette forme partout valable est

$$\begin{aligned}\Omega(\zeta) = {} & \frac{i}{\pi}\int_0^\pi \Phi'(\sigma)\log\frac{1-\zeta e^{-i\sigma}}{1-\zeta e^{i\sigma}}d\sigma + \frac{i}{\pi}[\Phi(\sigma_0+0) - \Phi(\sigma_0-0)]\log\frac{1-\zeta e^{-i\sigma_0}}{1-\zeta e^{i\sigma_0}} \\ & + \frac{i}{\pi}\int_0^\pi \Phi'(\sigma)\left\{\log\left(\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta - \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta + \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}\,\frac{\sin\left(\frac{\log\zeta}{2i} + \frac{\sigma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\log\zeta}{2i} + \frac{\sigma}{2}\right)}\right) + \frac{2\eta\omega\sigma}{i\pi^2}\log\zeta\right\}d\sigma \\ & + \frac{i}{\pi}[\Phi(\sigma_0+0) - \Phi(\sigma_0-0)]\left\{\log\left(\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta - \frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta + \frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)}\,\frac{\sin\left(\frac{\log\zeta}{2i} + \frac{\sigma_0}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\log\zeta}{2i} - \frac{\sigma_0}{2}\right)}\right) + \frac{2\eta\omega\sigma_0}{i\pi^2}\log\zeta\right\}\end{aligned}$$

ou bien, après réductions évidentes, et à cause de

$$\frac{\sin\left(\frac{\log\zeta}{2i} + \frac{\sigma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\log\zeta}{2i} - \frac{\sigma}{2}\right)} = e^{-i\sigma}\frac{1-\zeta e^{+i\sigma}}{1-\zeta e^{-i\sigma}} \qquad [cf(19)],$$

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 152, p. 305.

il vient

$$(\mathrm{B}_0)\quad \left\{\begin{aligned} \Omega(\zeta) &= \frac{i}{\pi}\int_0^\pi \Phi'(\sigma)\left\{\log\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta-\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta+\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}-i\sigma+\frac{2\eta\omega}{i\pi^2}\sigma\log\zeta\right\}d\sigma \\ &\quad+\frac{i}{\pi}[\Phi(\sigma_0+0)-\Phi(\sigma_0-0)]\left\{\log\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta-\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta+\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)}-i\sigma_0+\frac{2\eta\omega}{i\pi^2}\sigma_0\log\zeta\right\}. \end{aligned}\right.$$

Ceci peut encore se simplifier, en remarquant l'égalité

$$\int\sigma\Phi'(\sigma)\,d\sigma=\sigma\Phi(\sigma)-\int\Phi(\sigma)\,d\sigma$$

qui nous donne, en tenant compte de la discontinuité pour $\sigma=\sigma_0$,

$$\int_0^\pi\sigma\Phi'(\sigma)\,d\sigma=\sigma_0[\Phi(\sigma_0-0)-\Phi(\sigma_0+0)]+\pi\Phi(\pi)-\int_0^\pi\Phi(\sigma)\,d\sigma,$$

c'est-à-dire

$$(47)\qquad \int_0^\pi\sigma\Phi'(\sigma)\,d\sigma=\sigma_0[\Phi(\sigma_0-0)-\Phi(\sigma_0+0)]+\pi\Phi(\pi)$$

à cause de la condition (31).

Remplaçant dans (B_0) et simplifiant, il vient

$$(\mathrm{B})\quad \left\{\begin{aligned} \Omega(\zeta) &= \frac{i}{\pi}\int_0^\pi \Phi'(\sigma)\log\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta-\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta+\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}d\sigma \\ &\quad+\frac{i}{\pi}[\Phi(\sigma_0+0)-\Phi(\sigma_0-0)]\log\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta-\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta+\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)} \\ &\quad+\left[\frac{2\eta\omega}{\pi^2}\log\zeta+1\right]\Phi(\pi). \end{aligned}\right.$$

Étude de la fonction $\Omega(\zeta)$.

Il s'agit actuellement de vérifier que les formules obtenues dans le précédent Chapitre sont légitimes, et, à cet effet, de faire voir que la fonction $\Omega(\zeta)$ définie par les relations (A) ou (B) satisfait bien dans la couronne à toutes les conditions voulues par la théorie. Voici le détail de ces conditions (*cf.* ma Thèse, p. 233) :

1° La fonction Ω doit être réelle si le point ζ est sur l'axe réel;

2° Elle doit prendre des valeurs conjuguées en deux points ζ conjugués;

3° Elle doit être imaginaire pure pour $|\zeta| = q$;

4° La partie réelle Θ de Ω doit prendre sur la demi-circonférence supérieure $|\zeta| = 1$ ($\zeta = e^{i\varepsilon}$) la succession de valeurs $\Theta = \Phi(\varepsilon)$ (c'est la condition imposée par l'analyse du Chapitre précédent). Sur la demi-circonférence inférieure, Θ prend naturellement les mêmes valeurs que sur la demi-circonférence supérieure aux points conjugués;

5° Sur la circonférence $|\zeta| = 1$, la partie imaginaire $i\mathrm{T}$ de Ω doit être continue, sauf pour $\zeta = e^{\pm i\sigma_0}$ où T doit être infini. T doit être nul pour $\zeta = \pm 1$;

6° La fonction $\Omega(\zeta)$ doit être une fonction continue de ζ dans tout le domaine constitué par la couronne circulaire de rayons extrêmes q et 1, *limites comprises*, exception faite des deux points $\zeta = e^{\pm i\sigma_0}$ de la frontière extérieure.

Les premières tout au moins de ces conditions se vérifient ici sans peine.

Ω est réelle sur l'axe réel. — Prenons Ω sous sa forme (A)

$$\Omega(\zeta) = \frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^\pi \Phi(\sigma)\,\frac{\wp'\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right)}{\wp\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right) - \wp\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}\,d\sigma,$$

et supposons ζ réel et positif, pour fixer les idées : alors, le point ζ

étant dans la couronne, on a

$$q < \zeta < 1,$$

et, par suite,

$$\log q < \log\zeta < 0,$$

c'est-à-dire

$$-\frac{\pi\omega'}{i\omega} < \log\zeta < 0;$$

donc $\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta$ varie dans ces conditions, entre ω' et 0, en restant imaginaire pure. On sait qu'alors (*cf.* Appell et Lacour, p. 70) $p\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right)$ est réel (entre e_3 et $-\infty$), et $p'\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right)$ est purement imaginaire. Donc Ω est réelle.

Ω prend des valeurs conjuguées en deux points ζ conjugués. — Cela encore est à peu près évident : on peut en effet écrire, en désignant par F une certaine fonction, que je n'explicite pas,

$$\Omega(\zeta) = ip'\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right)\mathrm{F}\left[p\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right)\right].$$

Prenons alors pour ζ deux points conjugués, que nous pourrons écrire

$$\begin{aligned}\zeta &= \rho\, e^{i\sigma}\\ \zeta_1 &= \rho\, e^{-i\sigma}\end{aligned} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{aligned}\log\zeta &= \log\rho + i\sigma,\\ \log\zeta_1 &= \log\rho - i\sigma.\end{aligned}$$

Alors il viendra

$$\Omega(\zeta) = ip'\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\rho + \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)\mathrm{F}\left[p\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\rho + \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)\right],$$

$$\Omega(\zeta_1) = ip'\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\rho - \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)\mathrm{F}\left[p\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\rho - \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)\right],$$

c'est-à-dire, en observant que p est une fonction paire, et p' une fonction impaire,

$$\Omega(\zeta_1) = -ip'\left(-\frac{\omega}{i\pi}\log\rho + \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)\mathrm{F}\left[p\left(-\frac{\omega}{i\pi}\log\rho + \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)\right].$$

Sous cette forme, on voit que $\Omega(\zeta_1)$ se déduit de $\Omega(\zeta)$ en changeant i en $-i$; ces deux expressions sont donc bien imaginaires conjuguées.

On a un calcul analogue en prenant Ω sous la forme (B).

Ω est imaginaire pure pour $|\zeta| = q$. — Partons toujours de la même expression (A) et faisons

$$\zeta = q e^{i\varepsilon}.$$

$$\left(q = e^{-\frac{\pi\omega'}{i\omega}}\right),$$

et par suite

$$\log\zeta = -\frac{\pi\omega'}{i\omega} + i\varepsilon.$$

Dans ces conditions, la quantité $p\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right)$ deviendra (Appell et Lacour, p. 402)

$$p\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right) = p\left(\omega' + \frac{\omega}{\pi}\varepsilon\right) = e_3 + \frac{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)}{p\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon\right) - e_3},$$

et elle sera réelle; de la même manière, on aura

$$p'\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right) = p'\left(\omega' + \frac{\omega}{\pi}\varepsilon\right) = \frac{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)}{\left[p\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon\right) - e_3\right]^2} p'\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon\right),$$

quantité qui sera aussi réelle; l'équation (A) montre alors bien que Ω est imaginaire pure.

Valeurs de la partie réelle de Ω sur la circonférence $|\zeta| = 1$. — Prenons cette fois Ω sous sa forme (B), puisque nous sommes sur la frontière extérieure, et faisons

$$\zeta = e^{i\varepsilon};$$

il vient de suite

$$(48)\quad \left\{\begin{aligned} \Omega(e^{i\varepsilon}) &= \frac{i}{\pi}\int_0^\pi \Phi'(\sigma)\log\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}\,d\sigma \\ &\quad + \frac{i}{\pi}[\Phi(\sigma_0 + 0) - \Phi(\sigma_0 - 0)]\log\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)} \\ &\quad + \left(\frac{2\eta\omega}{\pi^2}i\varepsilon + 1\right)\Phi(\pi). \end{aligned}\right.$$

Pour fixer les idées, plaçons-nous sur la portion supérieure de la circonférence, et plus précisément supposons

$$0 < \varepsilon < \sigma_0,$$

de sorte que

$$\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right) < 0, \qquad \sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right) > 0,$$

et que la portion imaginaire de $\log \dfrac{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}$ sera 0 pour σ compris entre 0 et ε, et $i\pi$ pour σ compris entre ε et π.

Dans ces conditions, la partie réelle de $\Omega\,(e^{i\varepsilon})$ sera évidemment

$$\frac{i}{\pi}\int_\varepsilon^\pi \Phi'(\sigma)\,(i\pi)\,d\sigma + \frac{i}{\pi}[\Phi(\sigma_0+0) - \Phi(\sigma_0-0)]\,(i\pi) + \Phi(\pi).$$

Mais

$$\int_\varepsilon^\pi \Phi'(\sigma)\,d\sigma = [\Phi(\sigma)]_\varepsilon^{\sigma_0-0} + [\Phi(\sigma)]_{\sigma_0+0}^\pi = \Phi(\pi) - \Phi(\sigma_0+0) + \Phi(\sigma_0-0) - \Phi(\varepsilon).$$

Donc, en remplaçant, la partie réelle en question devient

$$\begin{aligned}&-\Phi(\pi) + \Phi(\sigma_0+0) - \Phi(\sigma_0-0)\\ &\qquad + \Phi(\varepsilon) - [\Phi(\sigma_0+0) - \Phi(\sigma_0-0)] + \Phi(\pi) = \Phi(\varepsilon).\end{aligned}$$

Démonstration analogue pour $\sigma_0 < \varepsilon < \pi$.

La partie réelle de la fonction Ω *construite reprend donc sur la demi-circonférence supérieure* $|\zeta| = 1$ *les valeurs* $\Phi\,(\varepsilon)$ *voulues.*

Les valeurs prises par cette partie réelle sur la demi-circonférence inférieure, sont les mêmes que sur la portion supérieure, puisque Ω prend des valeurs conjuguées en deux points conjugués.

Valeurs de la partie imaginaire $i\mathrm{T}_1$ *de* Ω, *sur la circonférence* $|\zeta| = 1$. — Nous appellerons $i\mathrm{T}$ la partie imaginaire de Ω, en général, et $i\mathrm{T}_1$ la valeur qu'elle prend en un point $\zeta = e^{i\varepsilon}$ de la circonférence de rayon 1. Nous savons que nous pouvons nous borner à considérer la demi-circonférence supérieure.

L'expression (48) écrite ci-dessus nous donnait la valeur de Ω sur cette circonférence; nous en extrayons immédiatement la partie imaginaire, à savoir

$$
(49)\quad \left\{
\begin{aligned}
T_1 = {} & \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Phi'(\sigma)\log\left|\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}\right| d\sigma \\
& + \frac{1}{\pi}\left[\Phi(\sigma_0 + 0) - \Phi(\sigma_0 - 0)\right]\log\left|\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)}\right| + \frac{2\eta\omega}{\pi^2}\,\varepsilon\,\Phi(\pi).
\end{aligned}
\right.
$$

Le second membre a toujours un sens, tant que ε n'est pas égal à $\pm\sigma_0$, c'est-à-dire tant que ζ ne coïncide pas avec un des deux points exclus : pour $\sigma = \varepsilon$, la quantité à intégrer se comporte en effet comme $\log|\sigma - \varepsilon|$, dont l'intégrale reste finie, comme on sait.

On peut simplifier l'expression précédente en utilisant la formule

$$
\begin{aligned}
\int \Phi'(\sigma)\log\left|\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}\right| d\sigma = {} & \left[\Phi(\sigma) - \Phi(\varepsilon)\right]\log\left|\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}\right| \\
& - \int \left[\Phi(\sigma) - \Phi(\varepsilon)\right]\frac{d}{d\sigma}\log\left|\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}\right| d\sigma
\end{aligned}
$$

dans laquelle on a introduit la différence $\Phi(\sigma) - \Phi(\varepsilon)$ pour que la partie tout intégrée reste finie pour $\sigma = \varepsilon$. On peut donc écrire

$$
\begin{aligned}
& \int_0^{\sigma_0 - 0} \Phi'(\sigma)\log\left|\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}\right| d\sigma \\
& \quad = \left[\Phi(\sigma_0 - 0) - \Phi(\varepsilon)\right]\log\left|\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)}\right| \\
& \qquad - \int_0^{\sigma_0 - 0} \left[\Phi(\sigma) - \Phi(\sigma)\right]\frac{d}{d\sigma}\log\left|\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}\right| d\sigma
\end{aligned}
$$

et

$$\int_{\sigma_0+0}^{\pi} \Phi'(\sigma) \log \left| \frac{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)} \right| d\sigma = [\Phi(\pi) - \Phi(\varepsilon)] \log \left| \frac{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \omega\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \omega\right)} \right|$$

$$- [\Phi(\sigma_0 + 0) - \Phi(\varepsilon)] \log \left| \frac{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)} \right|$$

$$- \int_{\sigma_0+0}^{\pi} [\Phi(\sigma) - \Phi(\varepsilon)] \frac{d}{d\sigma} \log \left| \frac{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)} \right| d\sigma.$$

D'ailleurs (Tannery et Molk, XII), on a

$$\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \omega\right) = - e^{\frac{2\eta\omega}{\pi}\varepsilon} \sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \omega\right),$$

et par suite

$$\left| \frac{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \omega\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \omega\right)} \right| = e^{-\frac{2\eta\omega}{\pi}\varepsilon}.$$

Donc

$$\log \left| \frac{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \omega\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \omega\right)} \right| = - \frac{2\eta\omega}{\pi}\varepsilon. \tag{50}$$

De là nous tirons

$$\int_{0}^{\pi} \Phi'(\sigma) \log \left| \frac{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)} \right| d\sigma$$

$$= [\Phi(\sigma_0 - 0) - \Phi(\sigma_0 + 0)] \log \left| \frac{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)} \right|$$

$$- \frac{2\eta\omega}{\pi} [\Phi(\pi) - \Phi(\varepsilon)]\varepsilon - \int_{0}^{\pi} [\Phi(\sigma) - \Phi(\varepsilon)] \frac{d}{d\sigma} \log \left| \frac{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)} \right| d\sigma.$$

Remplaçant dans T_1, il vient enfin, après réductions faciles,

$$(51)\qquad T_1 = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\Phi(\sigma) - \Phi(\varepsilon)]\frac{d}{d\sigma}\log\left|\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}\right| d\sigma + \frac{2\eta\omega}{\pi^2}\varepsilon\Phi(\varepsilon).$$

Sur l'expression initiale (49) de T_1 on aperçoit immédiatement que cette fonction devient infinie (négative) pour $\varepsilon = \pm\sigma_0$. Sur la dernière expression (51) nous constatons sans aucune peine que T_1 est nulle pour $\varepsilon = 0$ et pour $\varepsilon = \pi$, c'est-à-dire pour $\zeta = \pm 1$ (points où la vitesse e^{T_1} du fluide doit être égale à 1).

On a de suite $T_1 = 0$, pour $\varepsilon = 0$.

Pour $\varepsilon = \pi$, T_1 se réduit à

$$T_1' = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\Phi(\sigma) - \Phi(\pi)]\frac{d}{d\sigma}\log\left|\frac{\sigma\left(\omega - \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\sigma\left(\omega + \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}\right| d\sigma + \frac{2\eta\omega}{\pi}\Phi(\pi).$$

Mais la formule (50) donne

$$\frac{d}{d\sigma}\log\left|\frac{\sigma\left(\omega - \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\sigma\left(\omega + \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}\right| = \frac{d}{d\sigma}\left(-\frac{2\eta\omega}{\pi}\sigma\right) = -\frac{2\eta\omega}{\pi},$$

et par suite

$$T_1' = \frac{2\eta\omega}{\pi^2}\left[\int_0^\pi \Phi(\sigma)\,d\sigma - \int_0^\pi \Phi(\pi)\,d\sigma\right] - \frac{2\eta\omega}{\pi}\Phi(\pi),$$

ce qui est nul à cause de la condition (31).

Sur la circonférence $|\zeta| = 1$, sauf pour $\varepsilon = \pm\sigma_0$, T_1 est une fonction continue de ε. — Je vais maintenant faire voir que T_1 est une fonction continue de ε, les valeurs $\varepsilon = \pm\sigma_0$ étant toujours exceptées. Prenons T_1 sous sa première forme (49), et laissons de côté la partie intégrée, qui est manifestement continue dans les conditions qu'on vient de dire. Tout revient évidemment à faire voir que la fonction

$$\int_0^\pi \Phi'(\sigma)\log\left|\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}\right| d\sigma$$

est une fonction continue de ε; ou encore, que la différence

$$(52)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{I} &= \int_0^\pi \Phi'(\sigma)\log\frac{\mathfrak{s}\left|\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega}{\pi}\sigma\right|}{\mathfrak{s}\left|\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega}{\pi}\sigma\right|}\,d\sigma - \int_0^\pi \Phi'(\sigma)\log\frac{\mathfrak{s}\left|\frac{\omega}{\pi}\varepsilon_1 - \frac{\omega}{\pi}\sigma\right|}{\mathfrak{s}\left|\frac{\omega}{\pi}\varepsilon_1 + \frac{\omega}{\pi}\sigma\right|}\,d\sigma \\ &= \int_0^\pi \Phi'(\sigma)\log\left|\frac{\mathfrak{s}\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\mathfrak{s}\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon_1 - \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}\,\frac{\mathfrak{s}\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon_1 + \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\mathfrak{s}\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}\right|\,d\sigma \end{aligned}\right.$$

tend vers zéro avec $\varepsilon - \varepsilon_1$, ε_1 étant supposé fixe et non égal à $\pm\sigma_0$.

Nous pouvons nous borner au cas où le point $e^{i\varepsilon_1}$ est sur la demi-circonférence supérieure; supposons d'abord que ce point ne coïncide pas avec $\zeta = \pm 1$. Isolons alors, sur la demi-circonférence, autour du point $e^{i\varepsilon_1}$, un arc AB ayant ce point pour milieu, et de longueur $2h$. Puisque le point $e^{i\varepsilon}$ tend vers $e^{i\varepsilon_1}$, il finira par être compris dans cet arc, et nous supposerons dès maintenant qu'il en est ainsi. Cela étant, appelons $\mathfrak{M}$ le module maximum de $\Phi(\sigma)$ dans le voisinage de ε_1, et envisageons d'abord la portion

$$\mathrm{J} = \int_{\mathrm{AB}} \Phi'(\sigma)\log\frac{\mathfrak{s}\left|\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon - \sigma)\right|}{\mathfrak{s}\left|\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1 - \sigma)\right|}\,d\sigma$$

tirée de I.

On s'assure facilement qu'on a l'égalité

$$\int \log\mathfrak{s}\left|\frac{\omega}{\pi}(\sigma - \varepsilon)\right|d\sigma = (\sigma - \varepsilon)\log\mathfrak{s}\left|\frac{\omega}{\pi}(\sigma - \varepsilon)\right| - \int \frac{\omega}{\pi}(\sigma - \varepsilon)\,\zeta\left|\frac{\omega}{\pi}(\sigma - \varepsilon)\right|d\sigma.$$

Or, au voisinage de o, $u\zeta u$ est voisin de 1 : nous pouvons par suite affirmer que son module n'y dépasse pas 2; d'autre part, on a $\mathfrak{s}|u| < |u|$ dans les mêmes conditions. De là, et du fait que $x\left|\log\frac{\omega}{\pi}x\right|$ est une fonction croissante partant de zéro pour $x = 0$, il résulte qu'on peut écrire

$$\left|\int_{\text{arc MB}} \log\mathfrak{s}\left|\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon - \sigma)\right|\Phi'(\sigma)\,d\sigma\right| < \mathfrak{M}\left\{\mathrm{MB}\left|\log\frac{\omega}{\pi}\mathrm{MB}\right| + 2\,\mathrm{MB}\right\}$$

et de même

$$\left|\int_{\text{arc AM}} \log \varsigma\left|\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon-\sigma)\right| \Phi'(\sigma)\,d\sigma\right| < \mathfrak{M}\left\{ \mathrm{AM}\left|\log\frac{\omega}{\pi}\mathrm{AM}\right| + 2\,\mathrm{AM}\right\}.$$

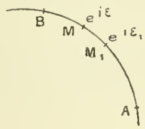
Et l'on a des inégalités analogues, en mettant M_1 à la place de M (ε_1 à la place de ε)

En conséquence, si, étant donné un nombre γ arbitrairement petit, nous choisissons h *fixe* satisfaisant à l'inégalité

$$\mathfrak{M}\left\{2h\left|\log\frac{2\omega}{\pi}h\right| + 4h\right\} < \gamma$$

(ce qu'on peut faire, puisque le premier membre tend vers zéro

Fig. 6.



avec h), nous aurons (les arcs AM, MB, AM_1, M_1B étant tous au plus égaux à $2h$)

$$|J| < 4\gamma.$$

Reste à considérer dans I les deux intégrales

$$\int_0^\pi \Phi'(\sigma)\log\frac{\varsigma\dfrac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1+\sigma)}{\varsigma\dfrac{\omega}{\pi}(\varepsilon+\sigma)}\,d\sigma, \qquad \int_{\frac{1}{2}\text{circonf.}-\text{arc AB}} \Phi'(\sigma)\log\frac{\varsigma\left|\dfrac{\omega}{\pi}(\varepsilon-\sigma)\right|}{\varsigma\left|\dfrac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1-\sigma)\right|}\,d\sigma.$$

Or on peut choisir $|\varepsilon - \varepsilon_1|$ assez petit pour que, quel que soit σ sur les arcs d'intégration respectifs, les expressions

$$\left|\log\frac{\varsigma\dfrac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1+\sigma)}{\varsigma\dfrac{\omega}{\pi}(\varepsilon+\sigma)}\right| \quad \text{et} \quad \left|\log\frac{\varsigma\left|\dfrac{\omega}{\pi}(\varepsilon-\sigma)\right|}{\varsigma\left|\dfrac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1-\sigma)\right|}\right|$$

soient moindres que $\frac{\gamma}{\mathfrak{M}'\pi}$, en appelant $\mathfrak{M}'$ le module maximum de $\Phi'(\sigma)$ sur la demi-circonférence.

$|\varepsilon - \varepsilon_1|$ étant ainsi choisi, les deux intégrales ci-dessus auront leur module plus petit que $\mathfrak{M}' \frac{\gamma}{\mathfrak{M}'\pi} \pi$, c'est-à-dire plus petit que γ.

Donc, $|\varepsilon - \varepsilon_1|$ étant choisi comme on vient de dire, nous aurons l'inégalité

$$|I| < 6\gamma.$$

Ce qui démontre la continuité annoncée.

Le raisonnement précédent, avec une modification insignifiante, s'applique encore lorsque le point $e^{i\varepsilon_1}$ coïncide avec l'un des points $\zeta = \pm 1$.

Continuité de la fonction Ω.

Nous arrivons maintenant au point le plus essentiel, qui est de montrer la continuité de notre fonction Ω, dans tout le domaine constitué par la couronne circulaire, limites comprises, exception faite des deux points $\zeta = e^{\pm i\sigma_0}$.

Cette continuité est facile à mettre en évidence tant qu'on se place en un point ζ_1 non situé sur la frontière extérieure $|\zeta| = 1$. On peut en effet prendre Ω sous la forme (A); puis il vient

$$\Omega(\zeta) - \Omega(\zeta_1)$$
$$= \frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^\pi \Phi(\sigma)\left\{\frac{p'\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right)}{p\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right) - p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)} - \frac{p'\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta_1\right)}{p\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta_1\right) - p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}\right\}d\sigma.$$

Or on peut montrer sans peine qu'on peut choisir $|\zeta - \zeta_1|$ assez petit pour que le module du coefficient de $\Phi(\sigma)$, sous le signe $\int$, soit plus petit qu'un nombre positif γ arbitrairement petit, et cela quel que soit σ dans l'intervalle $0, \pi$. Appelant alors $\mathfrak{M}$ le module maximum de $\Phi(\sigma)$ dans cet intervalle, il vient

$$|\Omega(\zeta) - \Omega(\zeta_1)| < \frac{\omega}{\pi^2}\mathfrak{M}\pi\gamma = \frac{\omega}{\pi}\mathfrak{M}\gamma.$$

Comme le second membre peut être choisi aussi petit qu'on veut, la continuité est bien démontrée au point ζ_1.

Nous voyons donc que Ω est continu partout, sauf peut-être sur la circonférence de rayon 1.

La démonstration est loin d'être aussi facile sur la frontière extérieure de la couronne. Mais nous allons pouvoir démontrer le théorème suivant :

Si le point ζ tend vers un point ζ_1 de la circonférence extérieure, autre que l'un des deux points exclus $e^{\pm i\sigma_0}$, en suivant un chemin intérieur à la couronne, et qui n'arrive pas au point ζ_1 tangentiellement à cette circonférence limite, — dans ces conditions, $\Omega(\zeta)$ tend vers $\Omega(\zeta_1)$.

Nous partirons cette fois de la forme (B) de Ω. Laissant de côté une portion visiblement continue, sauf aux deux points exclus, nous sommes de suite ramenés à montrer la continuité de la fonction

$$(53)\qquad U(\zeta)=\int_0^\pi \Phi'(\sigma)\log\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta-\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta+\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}\,d\sigma$$

ou bien à faire voir que, si $\zeta_1=e^{i\varepsilon_1}$ est un point de la frontière extérieure ($\varepsilon_1\neq\pm\sigma_0$) et si $\zeta=\rho e^{i\varepsilon}$ tend vers ζ_1 comme on l'a dit, la différence

$$(54)\qquad J_1=U(\zeta)-U(\zeta_1)=\int_0^\pi \Phi'(\sigma)\log\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta-\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta_1-\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}\,\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta_1+\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta+\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}\,d\sigma$$

tend vers zéro.

Nous supposerons d'abord $\zeta_1\neq\pm 1$, et nous pouvons nous borner au cas où ζ_1 est sur la demi-circonférence supérieure ($0<\varepsilon_1<\pi$).

Autour du point ζ_1 isolons un arc AB sur la circonférence, ayant ce point pour milieu; soit $2h$ la longueur de cet arc; et appelons J_{AB} et J' les deux parties de l'intégrale J_1 correspondant à l'arc AB et à la partie restante de la demi-circonférence.

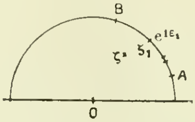
On verra facilement, comme dans ma Thèse (deuxième Partie, p. 278), que, si h est fixé, et la valeur qu'il faut lui donner résultera de ce qui va suivre, on peut choisir $|\zeta - \zeta_1|$ assez petit pour qu'on ait

$$|J'| < \gamma,$$

γ désignant un nombre positif choisi d'avance aussi petit qu'on veut.

Il n'y a donc en réalité à s'occuper que de J_{AB}; nous ferons voir qu'on

Fig. 7.



peut fixer la valeur de h de manière que $|J_{AB}|$ soit aussi petit qu'on veut.

En observant que les valeurs de σ aux extrémités de l'arc AB sont $\varepsilon_1 - h$ et $\varepsilon_1 + h$, une intégration par parties nous donne immédiatement

$$(55)\quad J_{AB} = \left[\{\Phi(\sigma) - \Phi(\varepsilon_1)\} \log \frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta - \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta_1 + \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta_1 - \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta + \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)} \right]_{\varepsilon_1 - h}^{\varepsilon_1 + h}$$

$$+ \frac{\omega}{\pi} \int_{\varepsilon_1 - h}^{\varepsilon_1 + h} [\Phi(\sigma) - \Phi(\varepsilon_1)] \times \left\{ \zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta - \frac{\omega}{\pi}\sigma\right) + \zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta + \frac{\omega}{\pi}\sigma\right) - \zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta_1 - \frac{\omega}{\pi}\sigma\right) - \zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta_1 + \frac{\omega}{\pi}\sigma\right) \right\} d\sigma$$

Nous étudierons séparément la partie intégrée et la partie restante.

Partie intégrée. — Cette partie est, en explicitant,

$$[\Phi(\varepsilon_1 + h) - \Phi(\varepsilon_1)] \log \frac{\sigma\left\{\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta - \frac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1 + h)\right\}\sigma\left\{\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta_1 + \frac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1 + h)\right\}}{\sigma\left\{\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta_1 - \frac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1 + h)\right\}\sigma\left\{\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta + \frac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1 + h)\right\}}$$

$$- [\Phi(\varepsilon_1 + h) - \Phi(\varepsilon_1)] \log \frac{\sigma\left\{\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta - \frac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1 - h)\right\}\sigma\left\{\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta_1 + \frac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1 - h)\right\}}{\sigma\left\{\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta_1 - \frac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1 - h)\right\}\sigma\left\{\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta + \frac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1 - h)\right\}}.$$

Je la sépare en deux moitiés :

$$\alpha_1 = [\Phi(\varepsilon_1+h)-\Phi(\varepsilon_1)]\log\frac{\sigma\left\{\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta_1+\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1+h)\right\}}{\sigma\left\{\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta+\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1+h)\right\}}$$
$$-[\Phi(\varepsilon_1-h)-\Phi(\varepsilon_1)]\log\frac{\sigma\left\{\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta_1+\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1-h)\right\}}{\sigma\left\{\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta+\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1-h)\right\}},$$

$$\alpha_2 = [\Phi(\varepsilon_1+h)-\Phi(\varepsilon_1)]\log\frac{\sigma\left\{\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta-\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1+h)\right\}}{\sigma\left\{\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta_1-\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1+h)\right\}}$$
$$-[\Phi(\varepsilon_1-h)-\Phi(\varepsilon_1)]\log\frac{\sigma\left\{\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta-\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1-h)\right\}}{\sigma\left\{\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta_1-\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1-h)\right\}},$$

dont la première sera visiblement de module inférieur à γ, si l'on prend $h<h_1$, h_1 étant un nombre que l'on peut déterminer; car, lorsque h est petit, les quantités qui interviennent sous le signe log ne s'annulent pas.

Considérons donc la seconde moitié, pour laquelle il n'en est plus ainsi.

Appelons $\mathfrak{M}_1$ un nombre positif supérieur à la valeur absolue du quotient $\frac{\Phi(\sigma)-\Phi(\varepsilon_1)}{\sigma-\varepsilon_1}$ lorsque le point $e^{i\sigma}$ se déplace sur un arc entourant le point $e^{i\varepsilon_1}$, et auquel l'arc AB soit assujetti à rester intérieur. Puis remarquons que

$$\sigma\left\{\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta_1-\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1+h)\right\}=\sigma\left(-\frac{\omega}{\pi}h\right) \quad \text{est réel et diffère peu de} \quad -\frac{\omega}{\pi}h,$$
$$\sigma\left\{\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta_1-\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1-h)\right\}=\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}h\right) \quad \text{est réel et diffère peu de} \quad \frac{\omega}{\pi}h,$$
$$\sigma\left\{\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta-\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1+h)\right\} \quad \text{diffère peu de} \quad \frac{\omega}{i\pi}\log\zeta-\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1+h),$$
$$\sigma\left\{\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta-\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1-h)\right\} \quad \text{diffère peu de} \quad \frac{\omega}{i\pi}\log\zeta-\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1-h),$$

tout ceci résultant de ce que, pour u petit, σu diffère peu de u. Plus précisément, on pourra déterminer un nombre h_2 tel que, pour $h<h_2$, on ait les inégalités

$$\left|\log\frac{\sigma\left(-\frac{\omega}{\pi}h\right)}{-\frac{\omega}{\pi}h}\right|<\frac{\gamma}{\mathfrak{M}_1},\qquad \left|\log\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}h\right)}{\frac{\omega}{\pi}h}\right|<\frac{\gamma}{\mathfrak{M}_1},$$

$$\left|\log\frac{\sigma\left\{\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta-\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1+h)\right\}}{\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta-\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1+h)}\right|<\frac{\gamma}{\mathfrak{M}_1},\qquad \left|\log\frac{\sigma\left\{\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta-\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1-h)\right\}}{\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta-\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1-h)}\right|<\frac{\gamma}{\mathfrak{M}_1}$$

(dont les deux premières ne sont d'ailleurs pas distinctes), et cela quel que soit ζ au voisinage de ζ_1, à condition que ζ soit suffisamment voisin de ζ_1. En effet, les inégalités ci-dessus seront assurées, dès que l'argument de chaque fonction σ sera suffisamment petit; et il en sera ainsi, par exemple, de

$$\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta-\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1+h)=\frac{\omega}{i\pi}\log\frac{\zeta}{\zeta_1}-\frac{\omega}{\pi}h,$$

dès que $\log\frac{\zeta}{\zeta_1}$ et h seront assez petits.

Il résulte de ce qu'on vient de dire, qu'en négligeant une expression dont le module est inférieur à $4\mathfrak{M}_1 h\times\frac{\gamma}{\mathfrak{M}_1}=4\gamma h$, on peut remplacer la quantité α_2 par la suivante :

$$\begin{aligned}\alpha_2'= &\quad[\Phi(\varepsilon_1+h)-\Phi(\varepsilon_1)]\log\frac{\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta-\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1+h)}{-\frac{\omega}{\pi}h}\\ &-[\Phi(\varepsilon_1-h)-\Phi(\varepsilon_1)]\log\frac{\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta-\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1-h)}{\frac{\omega}{\pi}h},\end{aligned}$$

dont le module sera inférieur à

$$\alpha_2''=\mathfrak{M}_1 h\left|\log\frac{\frac{1}{i}\log\zeta-\varepsilon_1-h}{-h}\right|+\mathfrak{M}_1 h\left|\log\frac{\frac{1}{i}\log\zeta-\varepsilon_1+h}{h}\right|.$$

Si nous prenons d'abord la partie imaginaire du logarithme de chaque quotient, nous voyons immédiatement que la portion correspondante de α''_2 est en module inférieure à $\mathfrak{M}_1 h \times 4\pi$; de sorte qu'en choisissant $h < h_3$, avec h_3 satisfaisant à

$$4\pi \mathfrak{M}_1 h_3 < \gamma,$$

la portion en question de α''_2, sera plus petite que γ en valeur absolue.

Prenons ensuite la partie réelle des logarithmes ci-dessus; ce qui en provient a pour expression

$$\mathfrak{M}_1 h \left| \log \frac{\left| \frac{1}{i} \log\zeta - \varepsilon_1 - h \right|}{h} \right| + \mathfrak{M}_1 h \left| \log \frac{\left| \frac{1}{i} \log\zeta - \varepsilon_1 + h \right|}{h} \right|$$

ou $(\zeta = \rho e^{i\varepsilon})$

$$\alpha'''_2 = \mathfrak{M}_1 h \left\{ \left| \log \frac{\sqrt{(\varepsilon - \varepsilon_1 - h)^2 + (\log\rho)^2}}{h} \right| + \left| \log \frac{\sqrt{(\varepsilon - \varepsilon_1 + h)^2 + (\log\rho)^2}}{h} \right| \right\}.$$

Or, $|h \log h|$ est aussi petit que l'on veut, pour h assez faible. Cette remarque rappelée, assujettissons ζ à être assez voisin de ζ_1 pour qu'on ait les inégalités

$$|\varepsilon - \varepsilon_1| < \frac{h}{2}, \qquad |\log\rho| < \frac{h}{2}.$$

Alors les deux radicaux

$$\sqrt{(\varepsilon - \varepsilon_1 - h)^2 + (\log\rho)^2} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{(\varepsilon - \varepsilon_1 + h)^2 + (\log\rho)^2}$$

seront certainement compris entre

$$\sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{\left(\frac{3h}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2},$$

c'est-à-dire entre $\frac{h}{2}$ et $h\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Si donc on détermine un nombre h_4 fixe satisfaisant à l'inégalité

$$\left| h_4 \log \frac{h_4}{2} \right| < \frac{\gamma}{\mathfrak{M}_1},$$

et par suite à

$$|h_4 \log h_4| < \frac{\gamma}{\mathfrak{M}_1},$$

$$\left| h_4 \log h_4 \frac{\sqrt{10}}{2} \right| < \frac{\gamma}{\mathfrak{M}_1},$$

il en résultera dans ces conditions

$$|\alpha_2'''| < 4\gamma.$$

Donc finalement, la partie intégrée de J_{AB}, si l'on choisit h plus petit que le plus petit des nombres h_1, h_2, h_3, h_4, est en module plus petite que

$$6\gamma + 4\gamma h$$

ou, si l'on préfère, que

$$10\gamma.$$

Elle est donc aussi petite que l'on veut.

Partie non intégrée de J_{AB}. — Reprenons maintenant la partie non intégrée dans la formule (55). A cause des formules (*cf.* Tannery et Molk, VII)

$$\begin{aligned}
&\zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta - \frac{\omega}{\pi}\sigma\right) + \zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta + \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)\\
&\qquad = 2\zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right) + \frac{p'\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right)}{p\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right) - p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)},\\
&\zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta_1 - \frac{\omega}{\pi}\sigma\right) + \zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta_1 + \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)\\
&\qquad = 2\zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta_1\right) + \frac{p'\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta_1\right)}{p\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta_1\right) - p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)},
\end{aligned}$$

l'expression à étudier prend la forme

$$\frac{\omega}{\pi}\int_{\varepsilon_1-h}^{\varepsilon_1+h} [\Phi(\sigma) - \Phi(\varepsilon_1)] \times \left\{ 2\left[\zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right) - \zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta_1\right)\right] + \frac{p'\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right)}{p\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right) - p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)} - \frac{p'\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta_1\right)}{p\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta_1\right) - p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)} \right\} d\sigma.$$

J'en extrais de suite la quantité

$$2\frac{\omega}{\pi}\int_{\varepsilon_1-h}^{\varepsilon_1+h}[\Phi(\sigma)-\Phi(\varepsilon_1)]\left[\zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right)-\zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta_1\right)\right]d\sigma,$$

dont le module sera plus petit que γ pour h assez petit, comme cela est évident. Et il reste à s'occuper d'une expression que je désignerai par $\mathcal{R}$, et qu'on peut écrire

$$(56)\quad \frac{\omega}{\pi}\int_{\varepsilon_1-h}^{\varepsilon_1+h}[\Phi(\sigma)-\Phi(\varepsilon_1)] \times\frac{\left[p'\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right)\left\{p\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta_1\right)-p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)\right\}-p'\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta_1\right)\left\{p\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right)-p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)\right\}\right]}{\left\{p\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right)-p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)\right\}\left\{p\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta_1\right)-p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)\right\}}d\sigma.$$

La quantité entre crochets au numérateur s'annule pour $\zeta=\zeta_1$. Soit $\mathfrak{M}'$ le module maximum de

$$\frac{p'\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right)\left\{p\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta_1\right)-p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)\right\}-p'\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta_1\right)\left\{p\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right)-p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)\right\}}{\zeta-\zeta_1},$$

lorsque le point $e^{i\sigma}$ est quelconque sur un petit arc auquel AB reste inférieur, et que ζ est voisin de ζ_1.

Les deux facteurs du dénominateur s'annulent si l'on y remplace ζ ou ζ_1 par $e^{i\sigma}$. Désignons par $\mathfrak{M}''$ et $\mathfrak{M}'''$ des nombres positifs plus petits respectivement que les quantités

$$\left|\frac{p\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right)-p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta-\frac{\omega}{\pi}\sigma}\right|,\qquad\left|\frac{p\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta_1\right)-p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta_1-\frac{\omega}{\pi}\sigma}\right|,$$

au voisinage du point $\zeta_1=e^{i\varepsilon_1}$.

Le choix de ces deux nombres est possible, car les deux quantités ci-dessus diffèrent peu de $p'\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon_1\right)$, dont la valeur n'est sûrement pas nulle, puisque ε_1 n'est pas égal à π.

Dans ces conditions, le module de l'intégrale $\mathcal{R}$ à étudier sera inférieur à

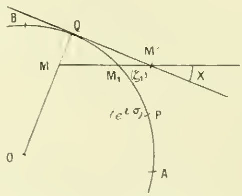
$$\frac{\pi}{\omega}\frac{\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}''\mathfrak{M}'''}\int_{\varepsilon_1-h}^{\varepsilon_1+h}\left|\frac{(\sigma-\varepsilon_1)(\zeta-\zeta_1)}{\left(\frac{\log\zeta}{i}-\sigma\right)(\varepsilon_1-\sigma)}\right|d\sigma.$$

Faisons enfin une dernière transformation : soit $\mathfrak{N}$ un nombre positif inférieur au module du rapport

$$\frac{\log\zeta-i\sigma}{\zeta-e^{i\sigma}},$$

au voisinage de la région considérée; le choix de $\mathfrak{N}$ est encore possible,

Fig. 8.



car le rapport envisagé diffère peu de $e^{-i\varepsilon_1}$. Alors l'intégrale de tout à l'heure aura sa valeur absolue plus petite que

$$\frac{\pi}{\omega}\frac{\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}''\mathfrak{M}'''\mathfrak{N}}\int_{\varepsilon_1-h}^{\varepsilon_1+h}\left|\frac{\zeta-\zeta_1}{\zeta-e^{i\sigma}}\right|d\sigma.$$

Or supposons maintenant que le point ζ tende vers le point ζ_1 en suivant un chemin rectiligne; comme on a (voir *fig.* 8)

$$\left|\frac{\zeta-\zeta_1}{\zeta-e^{i\sigma}}\right|=\frac{MM_1}{MP},$$

pour ζ donné, on aura le maximum de ce rapport lorsque le point P sera situé en Q, à l'intersection de la circonférence avec le rayon qui passe en M. En appelant maintenant M' le point de rencontre de MM_1 avec la tangente en Q au cercle, il est évident qu'on a

$$\frac{MM_1}{MP}<\frac{MM_1}{MQ}<\frac{MM'}{MQ}=\frac{1}{\sin\chi},$$

χ désignant l'angle de la figure.

Si alors nous avons eu soin de restreindre suffisamment l'arc AB entourant M_1, de telle sorte que quand M décrit le segment MM_1, l'angle χ ait un minimum χ' non nul (il suffira pour cela que sur l'arc AB il n'y ait aucune tangente parallèle à MM_1), dans ces conditions nous aurons constamment

$$\frac{MM_1}{MP} < \frac{1}{\sin\chi'},$$

et, par suite,

$$|\mathcal{R}| < \frac{\pi}{\omega} \frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}'' \mathfrak{M}'' \mathfrak{N}} \frac{1}{\sin\chi'} 2h.$$

Donc $|\mathcal{R}|$ sera inférieur à γ, si nous prenons h plus petit que

$$\frac{\omega \mathfrak{M}'' \mathfrak{M}''' \mathfrak{N} \sin\chi' \gamma}{2\pi \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}'}.$$

De tout ceci résulte qu'alors le module de la partie non intégrée de J_{AB} sera inférieur à 2γ.

En conséquence on aura finalement

$$|J_{AB}| < 12\gamma,$$

et J_{AB} sera aussi petit qu'on voudra.

En se rappelant ce que nous avions dit au début, de J', nous en concluons la continuité de $U(\zeta)$, c'est-à-dire celle de $\Omega(\zeta)$ dans les conditions annoncées.

Cas où $\zeta_1 = \pm 1$. — Les raisonnements précédents ne s'appliquent pas intégralement si le point ζ_1 de la frontière extérieure, vers lequel tend le point ζ, est l'un des deux points $\zeta_1 = \pm 1$. Élucidons, pour fixer les idées, le cas où l'on aurait

$$\zeta_1 = +1.$$

Prenant toujours Ω sous sa forme (B), et négligeant une partie visiblement continue au point $\zeta = +1$, tout revient à montrer, en ce point, la continuité de la fonction

$$G(\zeta) = \int_0^\pi \Phi'(\sigma) \log \frac{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\log\zeta - \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\log\zeta + \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)} d\sigma$$

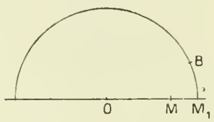
ou bien à faire voir que la différence

$$(57) \qquad L = G(\zeta) - G(1) = \int_0^{\pi} \Phi'(\sigma) \log \frac{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma - \frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma + \frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right)} d\sigma$$

tend vers zéro avec $|\zeta - 1|$; je ferai cette démonstration en supposant que ζ tend vers 1 *en restant sur l'axe réel.*

Sur la demi-circonférence j'isolerai un arc M_1B de longueur h, ayant pour origine le point 1, et j'appellerai L_{M_1B} et L' les deux por-

Fig. 9.



tions de L, relatives à ce petit arc, et au reste de la demi-circonférence. Une fois h fixé comme nous allons le faire dans un instant, rien ne sera plus facile que de choisir $|\zeta - 1|$ assez petit pour que $|L'|$ soit inférieur à tout nombre γ donné d'avance aussi petit qu'on veut. Le seul point délicat est de faire voir qu'on peut rendre

$$L_{M_1B} = \int_0^{h} \Phi'(\sigma) \log \frac{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma - \frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma + \frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right)} d\sigma$$

plus petit que tout nombre donné, par un choix convenable de h.

Or, dans cette dernière intégrale, $\log\zeta$ étant par hypothèse réel lorsque ζ réel tend vers 1, la quantité

$$\log \frac{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma - \frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right)}{\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma + \frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right)}$$

est imaginaire pure, puisque $\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma - \frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right)$ et $\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma + \frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right)$ sont deux imaginaires conjuguées, et que le module de leur quotient est par suite l'unité. Et comme le module du logarithme ci-dessus ne dépasse certainement pas 4π, il en résulte qu'en appelant μ un nombre positif supérieur aux valeurs absolues de $\Phi'(\sigma)$ au voisinage de $\sigma = 0$, on a l'inégalité

$$|L_{M_1 B}| < 4\pi\mu h,$$

et par suite on peut choisir h de manière que $|L_{AB}|$ soit inférieur à γ.

Dans ces conditions, on aura, moyennant ce qui a été dit au début,

$$|L| < 2\gamma$$

et la continuité sera assurée.

Enfin, en utilisant ce fait, qu'on a démontré que sur la circonférence $|\zeta| = 1$, T et par suite $\Omega(\zeta)$ étaient continus, sauf toujours aux deux points exclus $e^{\pm i\sigma_0}$, on conclura sans peine par un raisonnement élémentaire, que, quel que soit le chemin suivi par le point ζ tendant vers un point ζ_1 de la circonférence autre que $e^{\pm i\sigma_0}$, $\Omega(\zeta)$ tendra vers la valeur $\Omega(\zeta_1)$.

La continuité de la fonction $\Omega(\zeta)$ est donc complètement démontrée dans tout le domaine, limites comprises, à l'exclusion des deux points $e^{\pm i\sigma_0}$.

Conclusion. — La fonction $\Omega(\zeta)$, définie par les formules (A) ou (B), est la *fonction la plus générale* permettant de résoudre le problème du mouvement d'un solide dans un fluide limité par une paroi fixe; c'est, si l'on veut, l'intégrale générale de ce problème. L'arbitraire dont la question dépend est ici représentée par la fonction $\Phi(\sigma)$ qui n'est assujettie qu'à vérifier la condition (31)

$$\int_0^\pi \Phi(\sigma)\, d\sigma = 0.$$

Une fois $\Phi(\sigma)$ choisi, la forme de l'obstacle, et tous les éléments du mouvement en résultent. On peut former du reste l'équation intégrale que doit vérifier $\Phi(\sigma)$ si l'on se donne le profil de l'obstacle. Mais la résolution de cette équation n'est pas absolument nécessaire pour résoudre pratiquement le problème avec un obstacle de forme donnée.

En effet, notre fonction arbitraire $\Phi(\sigma)$ possède avec la forme de l'obstacle un lien étroit et évident. Car, si σ varie de 0 à π, le point ζ décrit le profil de l'obstacle dans le sens P_2OP_1 (*cf.* ma Thèse, p. 216). L'allure de $\Phi(\sigma)$, qui le long de ce profil est égal à l'angle de la tangente au profil avec l'axe des x, est donc parfaitement connue.

Donc, le profil étant supposé donné, nous pourrons immédiatement déterminer les propriétés caractéristiques de la fonction $\Phi(\sigma)$ particulière qui lui correspond. Cette fonction particulière appartiendra à une certaine classe de fonctions correspondant toutes à ces profils de même allure; et l'on pourra sans peine trouver dans cette classe une fonction particulière fournissant un obstacle aussi voisin que l'on voudra, d'un obstacle exactement donné d'avance.

Sur l'équation intégrale correspondant à un profil donné. — L'équation intégrale dont il vient d'être question est facile à former. En effet, le rayon de courbure en un point de la paroi, correspondant à $\zeta = e^{i\sigma}$ est donné par l'équation (*cf.* ma Thèse, p. 226, éq. 36)

$$R = \frac{d\varpi}{d\Theta} = -\frac{A\omega}{\pi}(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)^2$$
$$\times \frac{e^{-T_1}\left[\wp\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right) - \wp\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)\right]\wp'\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\left[\wp\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right) - e_3\right]\left[\wp\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right) - e_2\right]\left[\wp\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right) - e_3\right]^2}\frac{d\sigma}{d\Theta}.$$

Or, rappelons-nous que, sur le profil (le point ζ étant sur la circonférence $|\zeta| = 1$), on a

$$\Theta = \Phi(\sigma),$$

et, d'autre part, que T_1 y est fourni par l'équation (51)

$$T_1 = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\Phi(\varepsilon) - \Phi(\sigma)]\frac{d}{d\varepsilon}\log\left|\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma - \frac{\omega}{\pi}\varepsilon\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma + \frac{\omega}{\pi}\varepsilon\right)}\right|d\varepsilon + \frac{2\eta\omega}{\pi^2}\sigma\Phi(\sigma),$$

où j'ai interverti ε et σ pour avoir l'expression de T_1 convenant au point $\zeta = e^{i\sigma}$.

Cela étant, si la courbe qui constitue le profil de l'obstacle est déterminée (ce que l'on a le droit de supposer) par la relation

$$R = R(\Theta)$$

qui lie le rayon de courbure à l'angle Θ, nous voyons que la fonction $\Phi(\sigma)$ devra satisfaire à la relation suivante :

$$(58)\quad \left\{ \begin{aligned} & R[\Phi(\sigma)]\,\Phi'(\sigma)\, e^{-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\Phi(\varepsilon)-\Phi(\sigma)]\frac{d}{d\varepsilon}\log\left|\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma-\frac{\omega}{\sigma}\varepsilon\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma+\frac{\omega}{\pi}\varepsilon\right)}\right| d\varepsilon+\frac{2\eta\omega}{\pi^2}\sigma\Phi(\sigma)} \\ & = -\frac{A\omega}{\pi}\,\frac{(e_1-e_3)(e_2-e_3)^2}{\left[p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)-e_3\right]}\,\frac{\left[p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)-p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)\right]p'\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\left[p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)-e_2\right]\left[p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)-e_3\right]^2} \end{aligned} \right.$$

qu'il ne paraît pas possible de résoudre complètement par les moyens dont dispose actuellement l'analyse.

Application au problème du mouvement d'un solide de forme donnée.

On peut former de multiples exemples, où les intégrations puissent être poussées jusqu'au bout, dans lesquels on se donne à l'avance la forme de l'obstacle placé dans le fluide, et où l'on détermine tous les éléments du mouvement correspondant. Remarquons du reste que la possibilité d'effectuer en termes finis les intégrations n'est nullement indispensable pour la pratique : c'est seulement une commodité.

La principale question, dans le problème ainsi posé, consiste à déterminer la fonction $\Omega(\zeta)$ qui correspond à l'obstacle donné. A cet effet, il est essentiel de remarquer qu'il n'y aura pas en général besoin de recourir *aux deux* formules (A) et (B) qui donnaient $\Omega(\zeta)$ dans le cas général. Car, si, partant de la forme (A) (nous choisissons d'abord évidemment la plus simple), nous obtenons pour $\Omega(\zeta)$ après l'intégration, une expression en termes finis représentant une fonction continue de ζ dans tout le domaine constitué par la couronne circulaire que l'on sait (sauf bien entendu pour $\zeta = e^{\pm i\sigma_0}$), cette fonction $\Omega(\zeta)$ sera valable aussi bien sur les bords qu'à l'intérieur de ce domaine, à cause de la continuité que l'on a démontrée en général relativement à la fonction Ω, jusqu'aux limites du domaine en question.

Ceci nous dispensera, dans la pratique, d'avoir recours à la formule (B), évidemment moins maniable que la formule (A).

Cette remarque faite, pour donner ici au moins un exemple, considérons un obstacle ayant la forme indiquée par le dessin ci-dessous, et proposons-nous de résoudre le problème pour ce profil. Les tangentes en O aux deux branches font par hypothèse avec Ox deux angles opposés, dont la valeur absolue est quelconque.

Exemple. — En prenant la fonction $\Omega(\zeta)$ sous la forme

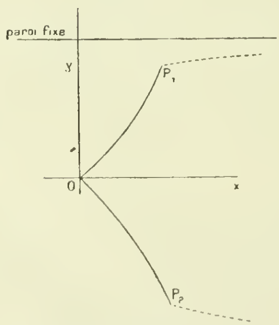
$$\Omega(\zeta) = \frac{i}{\pi} p'\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right)\int_0^{\omega} \frac{\Psi(s)\,ds}{p\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right) - ps}$$

avec la condition

$$(45') \qquad \int_0^{\omega} \Psi(s)\,ds = 0 \qquad \left(s = \frac{\omega}{\pi}\sigma\right),$$

si l'on se rappelle que le point z décrit la partie P_2O du contour

Fig. 10.



lorsque σ varie de 0 à σ_0, et la partie OP_1 lorsque σ varie de σ_0 à π, on voit qu'on doit prendre pour $\Psi(s)$ une fonction constamment négative et croissante dans l'intervalle 0, $\frac{\omega}{\pi}\sigma_0$; constamment positive et croissante dans l'intervalle $\frac{\omega}{\pi}\sigma_0, \omega$; en outre, en valeur absolue, la fonction $\Psi(s)$ ne doit pas dépasser $\frac{\pi}{2}$; et les deux valeurs $\Psi\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma_0 - 0\right)$ et $\Psi\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma_0 + 0\right)$ doivent être opposées.

Toutes ces conditions seront satisfaites si nous prenons, P étant une constante,

$$\sigma_0 = \frac{\pi}{2}, \qquad 0 < P < \frac{\pi}{4}.$$

$$(59) \qquad \begin{cases} \Psi(s) = P\dfrac{p's}{(ps)^{\frac{3}{2}}} & \text{si} \quad 0 < s < \dfrac{\omega}{2}, \\ \Psi(s) = -\Psi(\omega - s) & \text{si} \quad \dfrac{\omega}{2} < s < \omega. \end{cases}$$

Il suffit évidemment de vérifier que la fonction $\Psi(s)$, dont la valeur initiale pour $s = 0$ est $-2P$, va constamment en croissant jusqu'à $s = \frac{\omega}{2}$; ce qui revient à dire que son carré Z décroît constamment. Or, posons

$$Z = \frac{(p's)^2}{(ps)^3} = \frac{4(ps - e_1)(ps - e_2)(ps - e_3)}{(ps)^3}.$$

Si s croît de 0 à $\frac{\omega}{2}$, ps décroît de $+\infty$ à $e_1 + \sqrt{e_1 - e_2}\sqrt{e_1 - e_3}$, et $\mu = \frac{1}{ps}$ croît de 0 à $\frac{1}{e_1 + \sqrt{e_1 - e_2}\sqrt{e_1 - e_3}}$; je vais alors faire voir que $\frac{dz}{d\mu}$ reste négatif dans cet intervalle, où l'on a

$$Z = 4(1 - \mu e_1)(1 - \mu e_2)(1 - \mu e_3),$$

et par suite

$$\frac{dZ}{d\mu} = -4[3e_1e_2e_3\mu^2 - \mu\{e_1(e_2 + e_3) + e_2(e_3 + e_1) + e_3(e_1 + e_2)\}]$$

ou

$$\frac{dZ}{d\mu} = -4[3e_1e_2e_3\mu^2 + \mu(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2)].$$

Les deux racines du trinome entre crochets, zéro et la racine non nulle $\frac{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2}{-3e_1e_2e_3}$, sont, d'après le théorème de Rolle, comprises dans les intervalles

$$\frac{1}{e_1}, \quad \frac{1}{e_2}; \quad \frac{1}{e_2}, \quad \frac{1}{e_3}.$$

D'après cela, je distinguerai deux cas :

1° $e_2 < 0$. — Alors la seconde racine $\frac{e_1^2+e_2^2+e_3^2}{-3e_1e_2e_3}$ sera négative ($e_1e_2e_3 > 0$), et il est clair que $\frac{dZ}{d\mu}$ reste négative dans l'intervalle $0, \frac{1}{e_1+\sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_1-e_3}}$ considéré pour μ.

2° $e_2 > 0$. — Alors le produit $e_1e_2e_3$ est négatif, et μ commençant par être entre les racines du trinome, $\frac{dZ}{d\mu}$ est d'abord négatif. Il ne pourrait changer de signe dans l'intervalle $0, \frac{1}{e_1+\sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_1-e_3}}$ considéré, que si la racine positive de $\frac{dZ}{d\mu}$ tombait dans cet intervalle; or ceci exigerait l'inégalité

$$\frac{e_1^2+e_2^2+e_3^2}{-3\,e_1e_2e_3} < \frac{1}{e_1+\sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_1-e_3}}$$

évidemment équivalente à

$$e_1(e_1^2+e_2^2+e_3^2+3\,e_2e_3)+(e_1^2+e_2^2+e_3^2)\sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_1-e_3} < 0.$$

Mais, en se souvenant que

$$e_1+e_2+e_3 = 0,$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} e_1^2+e_2^2+e_3^2+3\,e_2e_3 &= 2\,e_1^2+e_2e_3 = 2\,e_1^2-e_2(e_1-e_2) \\ &= (e_1-e_2)(2\,e_1+e_2) = (e_1-e_2)(e_1-e_3) > 0. \end{aligned}$$

L'inégalité ci-dessus est donc impossible, puisque son premier membre est essentiellement positif, et $\frac{dZ}{d\mu}$ reste négatif dans l'intervalle considéré, comme dans le premier cas.

Si $e_2 = 0$, $\frac{dZ}{d\mu}$ est bien négatif d'une façon évidente, dans l'intervalle.

Le choix de la fonction $\Psi(s)$ correspond donc bien à la forme de profil donné.

Y a-t-il besoin de dire que notre fonction $\Psi(s)$ vérifie d'elle-même la condition (45').

Ceci posé, abordons le calcul de Ω.

Calcul de Ω. — Nous poserons, pour abréger momentanément l'écriture,

$$r = p\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right),$$

et nous écrirons

$$U = \frac{\pi\Omega(\zeta)}{P i p'\left(\frac{\varpi}{i\pi}\log\zeta\right)} = \frac{1}{P}\int_0^{\frac{\omega}{2}} \frac{\Psi(s)\,ds}{r - ps} + \frac{1}{P}\int_{\frac{\omega}{2}}^{\omega} \frac{\Psi(s)\,ds}{r - ps}.$$

En posant $s = \omega - s'$ dans la seconde intégrale, et supprimant ensuite l'accent, il vient sans peine

$$U = \frac{1}{P}\int_0^{\frac{\omega}{2}} \Psi(s)\left[\frac{1}{r - ps} - \frac{1}{r - p(\omega - s)}\right] ds.$$

D'ailleurs on a (Tannery et Molk, VII)

$$p(\omega - s) = p(\omega + s) = e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{ps - e_1}.$$

D'où, après réductions faciles,

$$U = \frac{1}{P}\int_0^{\frac{\omega}{2}} \Psi(s) \frac{(ps - e_1)^2 - (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{(r - ps)\{(r - e_1)(ps - e_1) - (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)\}}\, ds$$

ou

$$U = \int_0^{\frac{\omega}{2}} \frac{p's}{(ps)^{\frac{3}{2}}} \frac{(ps - e_1)^2 - (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{(r - ps)\{(r - e_1)(ps - e_1) - (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)\}}\, ds.$$

Or en posant

$$ps = X,$$

il vient

$$U = \int_0^{\frac{\omega}{2}} \frac{dX}{X^{\frac{3}{2}}} \frac{(X - e_1)^2 - (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{(r - X)[(r - e_1)(X - e_1) - (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)]}.$$

Puis le changement de variable tout indiqué

$$X = Y^2$$

donne

$$U = -\frac{2}{r-e_1}\int_0^\infty \frac{(Y^2-e_1)^2-(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{Y^2(Y^2-r)\left[Y^2-e_1-\frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{r-e_1}\right]}\,dY.$$

On vérifie maintenant facilement l'identité suivante

$$\begin{aligned}&\frac{(Y^2-e_1)^2-(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{Y^2(Y^2-r)\left[Y^2-e_1-\frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{r-e_1}\right]}\\ &\qquad=\frac{\mathcal{A}}{Y^2}+\frac{\mathcal{B}}{Y^2-r}+\frac{\mathcal{C}}{Y^2-e_1-\frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{r-e_1}},\end{aligned}$$

dans laquelle les coefficients ont les valeurs

$$\mathcal{A} = \frac{e_1^2-(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{r\left[e_1+\frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{r-e_1}\right]},$$

$$\mathcal{B} = \frac{r-e_1}{r}, \qquad \mathcal{C} = \frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{(e_1-e_2)(e_1-e_3)+e_1(r-e_1)},$$

et par suite il vient en passant aux primitives :

$$\begin{aligned}U = -\frac{2}{r-e_1}\Bigg[&-\frac{\mathcal{A}}{Y}+\frac{\mathcal{B}}{2\sqrt{r}}\log\frac{Y-\sqrt{r}}{Y+\sqrt{r}}\\ &+\frac{\mathcal{C}}{2\sqrt{e_1+\frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{r-e_1}}}\log\frac{Y-\sqrt{e_1+\frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{r-e_1}}}{Y+\sqrt{e_1+\frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{r-e_1}}}\Bigg]_{s=0}^{s=\frac{\omega}{2}}.\end{aligned}$$

Pour $s = 0$, on a évidemment $Y = \infty$. Pour $s = \frac{\omega}{2}$, on a

$$X = p\frac{\omega}{2} = e_1+\sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_1-e_3}.$$

et par suite

$$Y = \sqrt{e_1 + \sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}}.$$

Et par suite, en remplaçant dans U les coefficients par leurs valeurs écrites ci-dessus :

$$(60)\quad \Omega(\zeta) = \frac{Pi}{\pi} p'\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right) \left| \frac{2[e_1^2 - (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)]}{r[(e_1 - e_2)(e_1 - e_3) + e_1(r - e_1)]\sqrt{e_1 + \sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}}} \right.$$
$$- \frac{1}{r^{\frac{3}{2}}} \log \frac{\sqrt{e_1 + \sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}} - \sqrt{r}}{\sqrt{e_1 + \sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}} + \sqrt{r}}$$
$$- \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{\sqrt{r - e_1}[(e_1 - e_2)(e_1 - e_3) + e_1(r - e_1)]^{\frac{3}{2}}}$$
$$\left. \times \log \frac{\sqrt{e_1 + \sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}} - \sqrt{e_1 + \dfrac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{r - e_1}}}{\sqrt{e_1 + \sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}} + \sqrt{e_1 + \dfrac{(e_1 - e_3)(e_1 - e_3)}{r - e_1}}} \right|$$

dans laquelle on n'oubliera pas que $r = p\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right)$.

Vérification. — Il est facile de s'assurer que la partie réelle de la fonction Ω qu'on vient d'écrire reprend bien, sur la circonférence $|\zeta| = 1$, les valeurs primitivement données. Faisons en effet

$$\zeta = e^{i\varepsilon},$$

et supposons par exemple $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$. Alors r deviendra $p\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon\right)$ et variera entre $+\infty$ et $e_1 + \sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}$.

Dans ces conditions : $r - e_1$ restera positif,

$$(e_1 - e_2)(e_1 - e_3) + e_1(r - e_1)$$

également, et

$$e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{r - e_1}$$

variera de e_1 à $e_1 + \sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}$. Donc dans Ω un seul logarithme aura une partie imaginaire non nulle, à savoir celui qui intervient dans le second terme du crochet. Par suite, la partie réelle de Ω sera

$$\frac{Pi}{\pi}p'\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon\right)\frac{-i\pi}{\left[p\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon\right)\right]^{\frac{3}{2}}}=P\frac{p'\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon\right)}{\left[p\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon\right)\right]^{\frac{3}{2}}},$$

ce qui est bien celle qu'on devait trouver *a priori*.

La fonction $\Omega(\zeta)$ étant maintenant explicitée, il suffira de la transporter dans les formules (1), (2), (4) rappelées au début de ce Mémoire, pour en déduire les équations de la paroi, et la valeur de la résistance correspondante.

Nous n'insisterons pas davantage sur cet exemple, ni sur les multiples autres qu'il serait facile de former. On aperçoit notamment que $\Omega(\zeta)$ pourra s'exprimer en termes finis, lorsque la fonction $\Psi(s)$ sera de la forme

$$\Psi(s)=\{\text{fonction quelconque de } (ps)\}\times p's.$$

Dans un autre Mémoire [*Sur le mouvement discontinu d'un fluide dans un canal renfermant un obstacle* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1911)] j'indique de nouvelles applications de la fonction $\Omega(\zeta)$ étudiée en détail dans le Mémoire actuel. J'indiquerai également, ailleurs, comment il faut modifier les calculs exposés ci-dessus lorsque le fluide est limité par une paroi fixe (μ) donnée *non forcément rectiligne*, cette généralisation étant rendue possible par la résolution simple que j'ai fait connaître (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 152, p. 680) du problème de Dirichlet dans une couronne circulaire.

Sur le nombre des solutions de la congruence $|a_{ik}| \equiv \mathrm{A} \bmod \mathrm{M}$;

Par M. Camille JORDAN.

Soient A, M deux entiers quelconques ; $|a_{ik}|$ un déterminant à n colonnes, dont les n^2 éléments a_{ik} soient des entiers mod M.

Proposons-nous de calculer le nombre $\mathfrak{N}(n, \mathrm{A}, \mathrm{M})$ des solutions de la congruence

$$|a_{ik}| \equiv \mathrm{A} \bmod \mathrm{M}. \tag{1}$$

Si $\mathrm{M} = \mathrm{M}'\mathrm{M}''$, M' et M'' étant premiers entre eux, les nombres a_{ik}, A seront déterminés mod M si l'on connaît leurs restes a'_{ik}, A' par rapport à M' et leurs restes a''_{ik}, A'' par rapport à M'' ; et la congruence (1) équivaudra au système des deux suivantes :

$$|a'_{ik}| \equiv \mathrm{A}' \bmod \mathrm{M}', \qquad |a''_{ik}| = \mathrm{A}'' \bmod \mathrm{M}''.$$

On aura donc

$$\mathfrak{N}(n, \mathrm{A}, \mathrm{M}) = \mathfrak{N}(n, \mathrm{A}', \mathrm{M}')\,\mathfrak{N}(n, \mathrm{A}'', \mathrm{M}'').$$

Le problème est ainsi ramené au cas où M est une puissance d'un nombre premier.

Soit donc $\mathrm{M} = p^\mu$, et supposons d'abord $\mathrm{A} \gtrless 0 \bmod p^\mu$. Il sera de la forme cp^λ, λ étant un entier nul ou positif, mais $< \mu$; c un entier positif moindre que $p^{\mu-\lambda}$ et premier à p.

Soit $|a_{ik}|$ l'un des $\mathfrak{N}(n, cp^\lambda, p^\mu)$ déterminants cherchés qui satisfont à la congruence

$$|a_{ik}| = cp^\lambda \bmod p^\mu. \tag{2}$$

Soient p^{λ_1} la plus haute puissance de p qui divise tous les éléments de sa première ligne ; ... ; p^{λ_m} la plus haute puissance de p qui divise tous les déterminants formés avec les éléments de ses m premières lignes ; on aura évidemment

$$(3) \qquad 0 \leqq \lambda_1 \leqq \lambda_2 \ldots \leqq \lambda_{n-1} \leqq \lambda \quad \text{et} \quad \lambda_n = \lambda.$$

Désignons par

$$[n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, cp^\lambda, \mu]$$

le nombre des solutions qui correspondent à un système déterminé de valeurs des exposants *caractéristiques* $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda$; on aura

$$\mathfrak{N}(n, cp^\lambda, p^\mu) = \Sigma[n, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, cp^\lambda, \mu],$$

la sommation s'étendant à tous les systèmes de valeurs de ces exposants qui satisfont aux relations (3).

Considérons une des $[n, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, cp^\lambda, \mu]$ solutions à énumérer. Les éléments a_{1k} de la première ligne y seront de la forme $r_{1k}p^{\lambda_1}$, les r_{1k} étant $< p^{\mu-\lambda_1}$ et n'étant pas tous divisibles par p ; ceux des lignes suivantes, en nombre $n(n-1)$, peuvent être mis sous la forme

$$a_{ik} = q_{ik}p^{\mu-\lambda_1} + r_{ik},$$

q_{ik} étant $< p^{\lambda_1}$ et $r_{ik} < p^{\mu-\lambda_1}$. Les premiers termes peuvent être supprimés sans que le déterminant change de valeur mod p^μ ; ils sont également sans influence sur la valeur des exposants $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda$. Cela fait, la congruence (2), divisée par p^{λ_1}, deviendra

$$(4) \qquad |r_{ik}| \equiv cp^{\lambda-\lambda_1} \bmod p^{\mu-\lambda_1},$$

et, dans ce nouveau déterminant, les exposants caractéristiques seront tous diminués de λ_1.

Réciproquement, chaque solution de (4) donnera $p^{n(n-1)\lambda_1}$ solutions de (2) correspondant aux diverses valeurs possibles des q_{ik}. Nous obtenons ainsi une première formule de réduction

$$(5) \qquad \begin{aligned}&[n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, cp^\lambda, \mu] \\ &\quad = p^{n(n-1)\lambda_1}[n, 0, \lambda_2 - \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} - \lambda_1, cp^{\lambda-\lambda_1}, \mu - \lambda_1].\end{aligned}$$

Reste à énumérer celles des solutions de la congruence (4) correspondant à la série d'exposants $0, \lambda_2 - \lambda_1, \ldots, \lambda - \lambda_1$. Dans chacune d'elles, l'un au moins des éléments r_{1k} de la première ligne n'est pas divisible par p. Considérons en particulier celles où le premier des éléments non divisibles par p est $r_{1\alpha}$. Nous désignerons leur nombre par N_α et nous les grouperons en systèmes, en réunissant ensemble celles qui se déduisent de l'une d'elles par les opérations suivantes (lesquelles ne changent évidemment ni la valeur du déterminant, ni les constantes α, o, $\lambda_2 - \lambda_1, \ldots, \lambda - \lambda_1$) :

1° Multiplication de la première ligne par l et de la deuxième par $l^{-1} \bmod p^{\mu-\lambda_1}$, l étant l'un des $p^{\mu-\lambda_1-1}(p-1)$ nombres premiers à p et $< p^{\mu-\lambda_1}$;

2° Addition, à l'une quelconque des $\alpha - 1$ premières colonnes, de la $\alpha^{\text{ième}}$ colonne, multipliée par un des $p^{\mu-\lambda_1-1}$ multiples de p moindres que $p^{\mu-\lambda_1}$;

3° Addition, à l'une des $n - \alpha$ colonnes suivantes, de la $\alpha^{\text{ième}}$ colonne, multipliée par un nombre quelconque $< p^{\mu-\lambda_1}$;

4° Addition à l'une quelconque des $n-1$ lignes du déterminant, autre que la première, de celle-ci, multipliée par un nombre quelconque moindre que $p^{\mu-\lambda_1}$.

Chaque système ainsi formé contiendra

$$p^{\mu-\lambda_1-1}(p-1)\,p^{(\mu-\lambda_1-1)(\alpha-1)+(\mu-\lambda_1)(n-\alpha)+(\mu-\lambda_1)(n-1)} = p^{(\mu-\lambda_1)(2n-1)-\alpha}(p-1)$$

solutions évidemment distinctes, parmi lesquelles une solution *réduite*, dans laquelle $r_{1\alpha}$ est égal à 1, les autres éléments de la première ligne étant nuls, ainsi que ceux de la $\alpha^{\text{ième}}$ colonne. Dans cette solution réduite, le déterminant sera le produit de l'unité par un déterminant d'ordre $n-1$, ayant évidemment pour exposants caractéristiques $\lambda_2 - \lambda_1, \ldots, \lambda - \lambda_1$. Le nombre des réduites distinctes sera celui des déterminants Δ de ce genre qui sont congrus à $cp^{\lambda-\lambda_1} \bmod p^{\mu-\lambda_1}$, soit $[n-1, \lambda_2 - \lambda_1, \ldots, \lambda - \lambda_1, cp^{\lambda-\lambda_1}, \mu - \lambda_1]$. Chacune d'elles représentant un système de $p^{(\mu-\lambda_1)(2n-1)-\alpha}(p-1)$ solutions, on aura

$$N_\alpha = p^{(\mu-\lambda_1)(2n-1)-\alpha}(p-1)[n-1, \lambda_2 - \lambda_1, \ldots, \lambda - \lambda_1, cp^{\lambda-\lambda_1}, \mu - \lambda_1],$$

et en faisant la sommation par rapport à α,

$$\begin{aligned}&[n, \text{o}, \lambda_2 - \lambda_1, \ldots, \lambda - \lambda_1, cp^{\lambda-\lambda_1}, \mu - \lambda_1] \\ &= \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} N_\alpha = p^{(\mu-\lambda_1)(2n-1)-n}(p^n - 1)[n-1, \lambda_2 - \lambda_1, \ldots, \lambda - \lambda_1, cp^{\lambda-\lambda_1}, \mu - \lambda_1].\end{aligned}$$

Substituons cette valeur dans la formule (5); celle-ci devient

$$(6)\quad [n, \lambda_1, \ldots, \lambda, cp^\lambda, \mu] = (p^n - 1)\, p^{(2n-1)\mu + [n(n-1)-(2n-1)]\lambda_1 - n} \times [n-1, \lambda_2 - \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} - \lambda_1, cp^{\lambda-\lambda_1}, \mu - \lambda_1].$$

Par l'application réitérée de cette formule de réduction, on ramènera de même le calcul de

$$[n-1, \lambda_2 - \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} - \lambda_1, cp^{\lambda-\lambda_1}, \mu - \lambda_1]$$

à celui de

$$[n-2, \lambda_3 - \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1} - \lambda_2, cp^{\lambda-\lambda_2}, \mu - \lambda_2],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

et enfin à celui de

$$[1, cp^{\lambda-\lambda_{n-1}}, \mu - \lambda_{n-1}]$$

qui est évidemment égal à l'unité, car la congruence

$$a \equiv cp^{\lambda-\lambda_{n-1}} \bmod p^{\mu-\lambda_{n-1}}$$

n'a qu'une solution.

Le résultat final sera évidemment de la forme

$$[n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda, cp^\lambda, \mu] = (p^n - 1)(p^{n-1} - 1)\ldots(p^2 - 1)\, p^\rho,$$

ρ étant une fonction linéaire de $\mu, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ qu'il est aisé de calculer.

Le terme constant dans cette fonction sera

$$-n - (n-1) - \ldots - 2 = 1 - \frac{n(n+1)}{2}.$$

Le coefficient de μ sera

$$(2n-1) + (2n-3) + \ldots + 3 = n^2 - 1.$$

Celui de λ_1 proviendra exclusivement des deux premières réductions : il est égal à

$$n(n-1) - (2n-1) - [(n-1)(n-2) - (2n-3)] - (2n-3) = -1.$$

Ceux de $\lambda_2, \ldots, \lambda_{n-2}$ s'en déduiraient en changeant n en $n-1$, $n-2$, ... Ils sont donc aussi égaux à -1.

Enfin λ_{n-1} n'apparaît que dans la dernière réduction avec le coefficient

$$2(2-1) - (2.2-1) = -1.$$

On aura donc

$$\rho = 1 - \frac{n(n+1)}{2} + (n^2 - 1)\mu - (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{n-1})$$

et, par suite,

$$(7)\qquad \mathfrak{N}(n, cp^\lambda, p^\mu) = (p^n - 1)\ldots(p^2 - 1)\,p^{1-n\frac{n+1}{2}+(n^2-1)\mu}\sum p^{-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n-1})},$$

la sommation s'étendant à tous les systèmes de valeurs de $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ qui satisfont aux inégalités

$$\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots \leqq \lambda_{n-1} \leqq \lambda.$$

Ce résultat est indépendant de c, comme il était aisé de le prévoir.

Il resterait à calculer la somme

$$\sum p^{-(\lambda_1+\ldots+\lambda_{n-1})}.$$

Si λ est nul, $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ le seront également, et la somme se réduit à un seul terme, égal à l'unité.

Si $\lambda = 1$, un certain nombre des quantités $\lambda_1, \ldots$ pourront être nulles, les suivantes étant égales à 1. Si l est le nombre de ces dernières, on aura un terme égal à p^{-l}; la somme cherchée sera donc

$$\sum_0^{n-1} p^{-l} = \frac{p^{-n}-1}{p^{-1}-1}.$$

Si λ est plus grand que 1 la somme contiendra un nombre considérable de termes, dont beaucoup seront semblables. Mais on peut la transformer comme il suit :

Débarrassons-nous d'abord des puissances négatives de p en posant

$$\lambda_1 = \lambda - \alpha_1, \quad \ldots, \quad \lambda_{n-1} = \lambda - \alpha_{n-1}.$$

Il viendra

$$\sum p^{-(\lambda_1+\ldots+\lambda_{n-1})} = p^{-(n-1)\lambda}\sum p^{\alpha_1+\ldots+\alpha_{n-1}}$$

avec les conditions

$$0 \leqq \alpha_{n-1} \leqq \alpha_{n-2} \leqq \ldots \leqq \alpha_1 \leqq \lambda.$$

Or, si nous désignons par m un entier quelconque, on aura

$$(8)\qquad \sum_0^{\alpha_{k-1}} p^{m\alpha_k} = \frac{p^{m(\alpha_{k-1}+1)}-1}{p^m-1} = c_m p^{m\alpha_{k-1}} + d_m,$$

en posant pour abréger

$$c_m = \frac{p^m}{p^m - 1}, \qquad d_m = \frac{-1}{p^m - 1}.$$

On aura de même

$$\Sigma_0^\lambda\, p^{m\alpha_1} = c_m\, p^{m\lambda} + d_m.$$

Multiplions la formule (8) par $p^{\alpha_1+\dots+\alpha_{k-1}}$ et sommons par rapport à α_k. Il viendra

$$\Pi\, p^{\alpha_1+\dots+\alpha_{k-1}+m\alpha_k} = c_m \Sigma\, p^{\alpha_1+\dots+(m+1)\alpha_{k-1}} + d_m \Sigma\, p^{\alpha_1+\dots+\alpha_{k-1}}.$$

L'application répétée de cette formule de réduction donnera successivement

$$\begin{aligned}
\Sigma\, p^{\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1}} &= c_1 \quad \Sigma\, p^{\alpha_1+\dots+2\alpha_{n-2}} + d_1 \quad \Sigma\, p^{\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1}} \\
&= c_1 c_2 \Sigma\, p^{\alpha_1+\dots+3\alpha_{n-3}} + c_1 d_2 \Sigma\, p^{\alpha_1+\dots+\alpha_{n-3}} \\
&\quad + d_1 c_1 \Sigma\, p^{\alpha_1+\dots+2\alpha_{n-3}} + d_1 d_2 \Sigma\, p^{\alpha_1+\dots+\alpha_{n-3}} \\
&\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

On arrivera finalement à une somme de 2^{n-1} termes dont chacun sera de la forme

$$\mathrm{B}\, p^{l\lambda},$$

l étant l'un des entiers $0, 1, \dots, \lambda - 1$ et B un produit de $n-1$ facteurs des espèces c et d, et jouissant des propriétés suivantes :

Chaque facteur d_m (s'il n'est pas le dernier) est suivi dans B par l'un des deux facteurs c_1 ou d_1 ; et chaque facteur c_m (s'il n'est pas le dernier) est suivi de c_{m+1} ou de d_{m+1}.

Si le dernier facteur de B est un d, l sera nul, et B sera un produit de facteurs successifs ayant chacun l'une des formes suivantes :

$$(9) \qquad d_1, \quad (c_1 d_2), \quad (c_1 c_2 d_3), \quad \dots.$$

Soient $k_1, k_2, k_3, \dots$ les nombres de facteurs de ces diverses sortes ; on aura

$$(10) \qquad n - 1 = k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \dots.$$

D'ailleurs, en permutant ces facteurs, on obtiendra $\dfrac{(n-1)!}{k_1!\,k_2!\,k_3!\dots}$ termes semblables, dont chacun sera égal à

$$d_1^{k_1}(c_1 d_2)^{k_2}(c_1 c_2 d_3)^{k_3}\dots = (-1)^{k_1+k_2+\dots} \frac{p^{k_2+3k_3+\dots+\frac{\nu(\nu-1)}{2}k_\nu+\dots}}{(p-1)^{k_1+k_2+\dots}(p^2-1)^{k_3+\dots}\dots}.$$

L'ensemble des termes de la somme où $l = 0$ sera donc la somme

$$\Sigma(-1)^{k_1+k_2+\dots} \frac{(n-1)!}{k_1!\,k_2!\dots} \frac{p^{k_2+3k_3+\dots+\frac{\nu(\nu-1)}{2}k_\nu+\dots}}{(p-1)^{k_1+k_2+\dots}(p^2-1)^{k_2+\dots}\dots}$$

étendue à toutes les valeurs de $k_1, k_2, \dots$ qui satisfont à la condition (10). Cette somme est une fonction de $n-1$, que nous désignerons par S^0_{n-1}.

Considérons maintenant un terme $Bp^{l\lambda}$ où l soit différent de zéro. Les l derniers facteurs de B seront nécessairement $c_1 c_2 \dots c_l$.

Les $n-1-l$ facteurs précédents pourront être groupés en facteurs des formes (9). La somme S^l_{n-1} des coefficients des termes en $p^{l\lambda}$ sera donc

$$c_1 c_2 \dots c_l S^0_{n-1-l} = \frac{p^{\frac{l(l+1)}{2}}}{(p-1)\dots(p^l-1)} S^0_{n-1-l}.$$

Les coefficients S^l_{n-1} étant ainsi définis, on aura

$$\sum p^{-(\lambda_1+\dots+\lambda_{n-1})} = p^{-(n-1)\lambda} \sum p^{\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1}} = p^{-(n-1)\lambda} \sum_{l=0}^{l=n-1} S^l_{n-1} p^{l\lambda}.$$

Nous avons dans tout ce qui précède cherché à déterminer le nombre $\mathfrak{N}(n, A, p^\mu)$ des solutions de la congruence

$$|a_{ik}| \equiv A \bmod p^\mu,$$

en supposant que $A = cp^\mu$ est différent de zéro.

Si A était nul, la méthode que nous avons suivie exigerait quelques modifications, pour tenir compte des solutions dans lesquelles tous les coefficients de la première ligne seraient nuls soit dans le déterminant primitif, soit dans l'un des déterminants successifs d'ordre $n-1$, $n-2$, ... auxquels conduit la méthode de réduction. (Ces solutions n'existent pas si le déterminant n'est pas nul.)

Au lieu de reprendre les calculs, il est plus simple de déterminer le nombre $\mathfrak{N}(n, 0, p^\mu)$ par différence, en remarquant que le nombre total des hypothèses possibles sur les valeurs des éléments a_{ik} étant $p^{n^2\mu}$, on doit avoir

$$\sum_{A=0}^{A=p^\mu-1} \mathfrak{N}(n, A, p^\mu) = p^{n^2\mu},$$

d'où

$$\mathfrak{N}(n, 0, p^\mu) = p^{n^2\mu} - \sum_{c,\lambda} \mathfrak{N}(n, cp^\lambda, p^\mu), \tag{11}$$

où c parcourt la suite des $p^{\mu-\lambda-1}(p-1)$ nombres premiers à p et moindres que $p^{\mu-\lambda}$, et λ la suite des nombres $0, 1, \ldots, \mu - 1$.

La sommation par rapport à c est immédiate, car nous avons vu que $\mathfrak{N}(n, cp^\lambda, p^\mu)$ est indépendant de c. On aura donc

$$\sum_{c,\lambda} \mathfrak{N}(n, cp^\lambda, p^\mu) = p^{\mu-\lambda-1}(p-1) \sum_{\lambda} \mathfrak{N}(n, cp^\lambda, p^\mu).$$

Substituant dans (11) et remplaçant $\mathfrak{N}(n, cp^\lambda, p^\mu)$ par sa valeur (7) il vient

$$\mathfrak{N}(n, 0, p^\mu) = p^{n^2\mu}\left[1 - (p^n - 1)\ldots(p-1)p^{\frac{n(n+1)}{2}} \sum p^{-(\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-1} + \lambda)}\right],$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs de $\lambda_1, \ldots, \lambda$ qui satisfont aux relations

$$0 \leqq \lambda_1 \leqq \ldots \leqq \lambda \leqq \mu - 1.$$

Cette somme, dont la forme est toute semblable à celle de la somme $\Sigma p^{-(\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-1})}$ étudiée plus haut, est susceptible de la même transformation.

TABLE DES MATIÈRES.

SIXIÈME SÉRIE. — TOME VII.

Les indications qui précèdent le titre de chaque Mémoire de cette Table sont celles adoptées par le Congrès international de Bibliographie des Sciences mathématiques en 1889.

(*Note de la Rédaction.*)

FIN DU TOME VII DE LA SIXIÈME SÉRIE.

46065 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins.